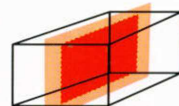
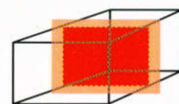
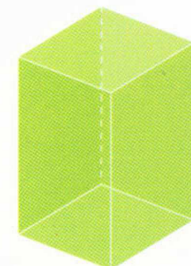


# MATEMATIKA

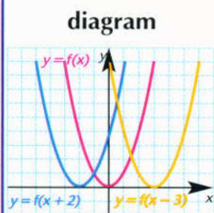
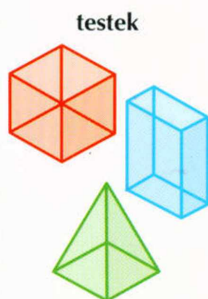
## KÉPES SZÓTÁR



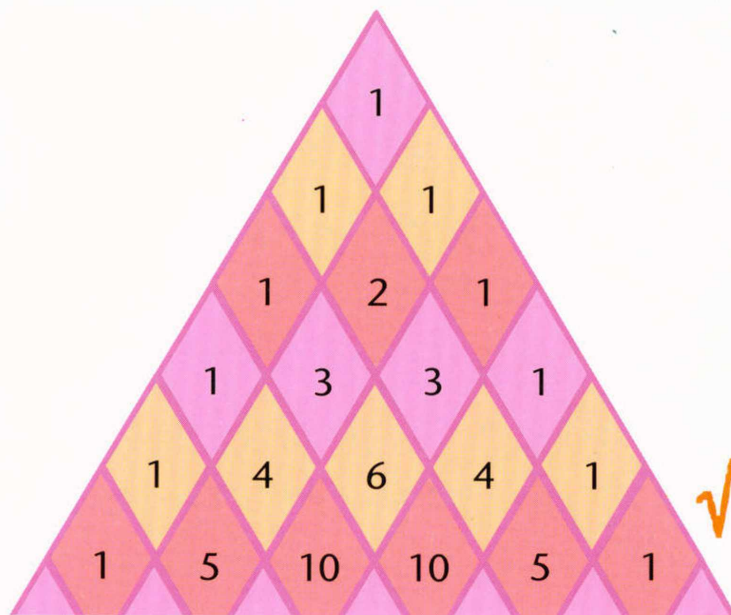
egyenes hasáb



számok



mozaikok

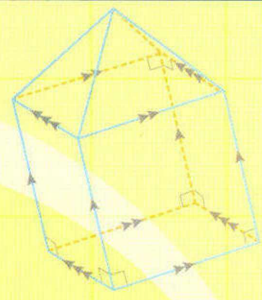


$\sqrt{2} = 1,4142135$

- több mint 500 világos definíció
- több mint 300 rajz és diagram
- több mint 100 kidolgozott példa

INTERNET-ELÉRHETŐSÉG, WEBLAPOK



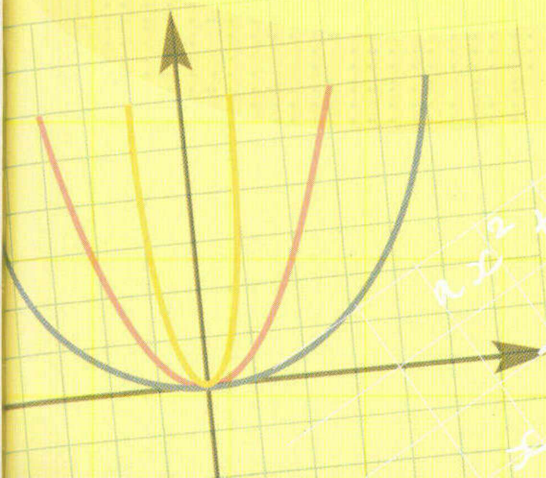


# MATEMATIKA KÉPES SZÓTÁR

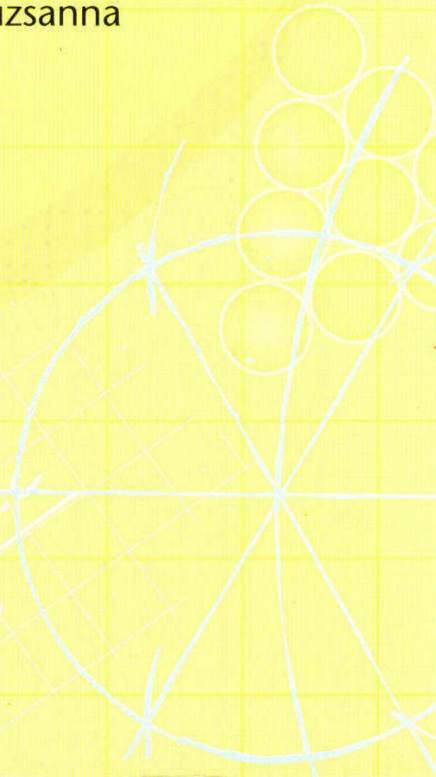
Szöveg: Tori Large

Illusztrációk: Adam Constantine

Fordította: Koromné Beck Zsuzsanna



$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



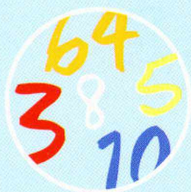


# MI IS AZ A MATEK?

A matek vagy matematika oldalak, formák és mennyiségek közötti összefüggések tudománya, mely leírásában számokat és szimbólumokat használ.

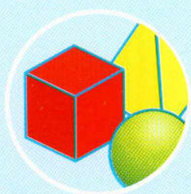
Ebben a könyvben négy fejezetre osztottuk a matematikát.

A különböző területeket és azok kisebb részeit itt ismertetjük.



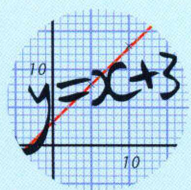
## Számok

Különböző típusú számokat tartalmaz, megmutatva, hogy ezek a matematikai számítások építőkövei, és ugyancsak lényeges eszközei a mindennapi életnek is.



## Formák, tér és mértékek

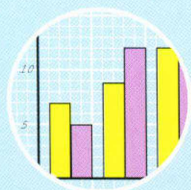
Több különböző testnek és a körülöttünk lévő formáknak a tulajdonságait, méreteit foglalja magába. Áttekinti a mindennapi élet során használt mértékeket, úgymint hosszúság, tömeg és térfogat.



## Algebra

Az algebra a matematikának az az ága, mely betűket és szimbólumokat használ a számok bemutatására és a köztük lévő összefüggések kifejezésére.

Ez a rész tartalmazza az egyszerűsítés és egyenletmegoldás különböző eljárásait, illetve a függvények ábrázolását és jellemzését.



## Adatkezelés

Különböző módszereket, lehetőségeket ismertet az adatok gyűjtésére és elemzésére, megmutatva, hogyan értékeljük a kapott eredményeket grafikonon vagy táblázatban.



# TARTALOM

## SZÁMOK

- 6 Számok
- 12 Halmazok
- 14 Számtan
- 17 Törtek
- 19 Tizedes törtek
- 21 Hatványok és normálalak
- 24 Hányados és arányok
- 27 Százalékszámítás

## FORMÁK, TÉR ÉS MÉRTÉKEK

- 30 Geometria
- 32 Szögek
- 34 Sokszögek
- 40 Testek
- 42 Szimmetria
- 43 Transzformációk
- 45 Vektorok
- 47 Geometriai szerkesztések
- 51 Nevezetes mértani helyek
- 52 Kicsinyítés
- 55 Terület, kerület
- 58 Térfogat
- 60 Trigonometria
- 65 Körök
- 66 Számítások a körön belül
- 70 Szögek egy körben
- 72 Mértékek
- 74 Idő

## ALGEBRA

- 75 Algebra
- 76 Az algebra alapjai
- 79 Egyenletek
- 80 Algebrai függvények
- 85 Másodfokú egyenletek
- 87 Egyenletrendszerek
- 90 Egyenlőtlenségek
- 92 Függvények
- 94 Olvassunk grafikonról!

## ADATKEZELÉS

- 96 Adatok
- 100 Átlagok
- 102 Szélesség mérése
- 105 Adatok feltüntetése
- 112 Valószínűség
- 116 Pénzügyi kifejezések A-tól Z-ig
- 118 Matematikai szimbólumok
- 119 Tárgymutató





# INTERNET-ELÉRHETŐSÉGEK

A könyvben szereplő témákhoz kiválasztottunk néhány izgalmas és fontos weboldalt, ahol még jobban megismerheted az adott tárgykört, vagy gyakorolhatod a tanultak használatát. Az oldalak megtekintéséhez látogass el az *Usborne Quicklinks Website* – ra, és írd be a „*maths dictionary*” (matematikai szótár) jelszót. Az itt található linkekről minden elérhető a témával kapcsolatban.

## Néhány lehetőség az ajánlott weboldalról:

- Találsz itt matematikai rejtvényeket, kérdéseket és játékokat, melyekkel ellenőrizheted tudásodat, illetve javíthatod eredményeidet.
- Matematikai szakkifejezések használatával beutazhatsz az univerzumot az atomok legbelsejétől a távoli világűrre.
- Irányíthatsz egy autót változó irányú és nagyságú vektorokkal.
- Ellenőrizheted a tudásodat online feladatlapokon, ahol azonnal megnézheted a válaszokat is.
- Megtanulhatsz trükköket, hogyan végezz el fejben bonyolult matematikai számításokat.
- Találsz még további feladatokat és megfigyeléseket, melyek segítségével a tárgyhoz tartozó szűkebb területekben is elmélyülhetsz.

### Hogyan érheted el ezeket az oldalakat?

Hogy csatlakozz azokhoz az oldalakhoz, amelyeket a könyv témáival kapcsolatban ajánlunk, látogass el az *Usborne Quicklinks Website*-ra, írd be a „*maths dictionary*” (matematikai szótár) jelszót, majd kövesd a további utasításokat!



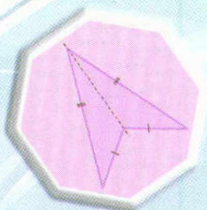
## Biztonsági tanácsok az internethez:

Az internetet használva, tartsd szem előtt a következő tanácsokat:

- Gyermeked az internetre csatlakozás előtt kérjék a szülő vagy a nevelő hozzájárulását!
- Ha üzenetet küldnél valamely website vendégoldalára vagy fórumára, ne írd be személyes adataidat, nevedet, címedet, telefonszámodat, sőt az e-mail címedet is csak akkor, ha egy felnőtt véleményét kikérted!
- Ha egy weboldalra való belépéshez vagy regisztrációhoz kérik személyes adataidat, mielőtt beírnád, feltétlenül kérdezz meg egy felnőttet!
- Ha egy ismeretlentől kapsz üzenetet, mielőtt válaszolnál, mutasd meg egy felnőttnek!
- Ne beszélj meg személyes találkozót senkivel, akivel az interneten levelezel!

## Az elérhetőségekről, lehetőségekről

A *Usborn Quicklinks* kapcsolatokat rendszeresen felülvizsgálják, korszerűsítik, de néhanapján kaphattok olyan üzenetet, hogy elérhetetlen. Ez csak ideiglenes lehet, ezért próbáld meg később vagy másnap. Ha a probléma nem átmeneti, mi, amennyiben lehetséges, helyreállítjuk a megfelelő módon. Ezért mindig nézd meg a legújabb kapcsolatok listáját!





## Az Internet használata

Az ebben a könyvben leírt weboldalak egyszerű otthoni számítógéppel és egy böngésző-programmal elérhetőek (mely program lehetőséget ad arra, hogy az Interneten lévő információk a képernyőn megjelenjenek).

### Extrák

Néhány weboldal használatához további ingyenes programok („*plug-in*”-ek = beépülő modulok, bővítmények) szükségesek a hanglejátszáshoz, a videók, animációk vagy háromdimenziós képek megtekintéséhez. Ha egy oldalt nézünk, és nincs meg a szükséges *plug-in*, egy üzenet jelenik meg a képernyőn. Általában az adott oldalon található egy gomb, amelyre rákattintva a *plug-in* letölthető. Ezenkívül a „*Net Help*”-re kattintva találhatunk olyan linkeket, ahonnan a szükséges programok letölthetők. Az alábbiakban a szükséges *plug-in*-ek listája található:

**RealOne Player** – video- és audiofájlok lejátszásához

**QuickTime** – videoklippek megtekintéséhez  
**Flash** – animációk lejátszásához

**Shockwave** – animációk és interaktív programok lejátszásához

### Súgó

Általános segítség és eszköz az Internet használatához, a adott oldalon található „*Net Help*”. Ha többet akarunk megtudni a böngészőnk használatáról, kattintsunk a böngészőprogram tetején található „*Help*”-re, majd válasszuk a „*Contents and Index*”-et. Itt számos tippet kaphatunk, hogyan böngésszünk az Interneten.

## Vírusok

A számítógépes vírus olyan program, mely nagy károkat okozhat a gépben. A vírus a gépre kerülhet a programok Internetről való letöltése közben, vagy egy e-mail mellékletével (csatolt fájl). Javasoljuk, hogy számítógépe védelmében vegyen antivírus-programot, amelyet rendszeresen frissít. A vírusokról további információt talál az Usborne Quicklinks oldalon, a „*Net Help*”-re kattintva.

## Megjegyzések szülőknek

Az Usborne Quicklinks weboldalait rendszeresen felülvizsgálják, és a linkeket frissítik. Mindazonáltal a weboldal tartalma bármikor változhat, és az Usborne Publishing nem felelős semmi olyan weboldal tartalmáért, amely nem az övé.

Javasoljuk, hogy miközben a gyerekek az Internetet használják, figyeljenek rá, hogy közben ne látogassák az úgynevezett a csevegő szobákat (*chat*), Önök pedig használjanak tartalomszűrőket a nem kívánatos anyagok kiszűrésére. Kérjük, bizonyosodjon meg róla, hogy gyermekei elolvasták és betartják a használati utasításban foglaltakat!

További információért kattintson a „*Net Help*”-re az *Usborne Quicklinks* oldalon.

A számítógép nem nélkülözhetetlen.  
Ha nincs Internet-elérése, ne aggódjon!  
Ez a könyv önmagában is teljes,  
önálló mű.





A számok a matematika alapvető építőkövei. Közös tulajdonságaik alapján különböző halmazokba sorolhatjuk őket.

### Számjegyek:

10 különböző, az araboktól származó számjegyet használunk: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

### Számrendszer:

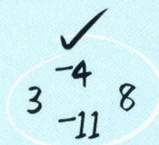
Egyik lehetősége annak, hogy a számok segítsenek minket a számolásban. A **tíz-es számrendszer** például 10 számjegyet használ (0, 1, 2, ... 9), melyek segítségével nagyobb számokat is megjeleníthetünk. Ezt a számrendszert használja a legtöbb ember manapság. Egyes vélemények szerint eredete arra vezethető vissza, hogy régen az emberek 10 ujjuk segítségével számoltak. A **bináris**, azaz **kettes alapú** számrendszert a számítástechnika használja, és csak két számjegy kell hozzá: 0, 1.

### Egész számok:

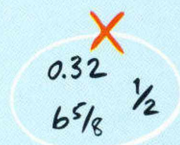
A **pozitív** és a **negatív egész számok** halmaza, beleértve a nullát is.

pl.: -11, -4, 0, 3, 8, 12

Nem tartoznak ide a törtek\*, tizedes törtek\* vagy vegyes törtek\*, mint az  $\frac{1}{2}$ , 0.32,  $6\frac{5}{8}$ .



egészek



nem egészek

### Természetes számok:

A pozitív **egész számokat** számlálásra használhatjuk, pl.: 1, 2, 3, 4

Ide soroljuk a 0-t is, minden nemnegatív egész számot.

A természetes számokat összeadhatjuk, kivonhatjuk, szorozhatjuk vagy eloszthatjuk egymással (lásd 14–15. oldal).

### Egymást követő számok:

Olyan egész számok, melyek egymás után következnek. Pl.: 4, 5, 6, 7, 8...

### Helyi érték:

Egy **számjegy** értéke függ a számban elfoglalt helyétől. Pl.: a 12, 205, 2600 mindegyike tartalmazza a 2-es számjegyet, de a 2-es helye minden számban más és más.

A 12-ben 2 db egyest, a 205-ben 2 db százast, míg a 2600-ban 2 db ezrest jelent.

A helyi értékek a tíz hatványaival\* fejezhetők ki. A tizedes ponttól jobbra találhatók a tízedek, századok stb.; balra pedig az egymást követő tíz hatványok: egyesek, tízesek, századok, ezresek.

ezresek	századok	tízesek	egyesek	tízedek	századok
0	2	0	5	1	0
				tizedesvessző*	

A fenti táblázat mutatja, hogy a 205-ben a 2 a századok, a 0 a tízesek és az 5 az egyesek számát jelenti. Az összes 0, ami az első „értékes” számjegy\* előtt áll (itt a 2), elhagyható.



**Pozitív szám:**

Minden nullánál nagyobb szám. pl.: +1, +6.5, +327

A pozitív számokat jelölhetjük a szám előtt egy (+) jellel, de általában e nélkül írjuk. Minden olyan számot, mely előtt nincs előjel, pozitívnak tekintünk.

A hétköznapi életben az egyik leggyakoribb módja a **pozitív és negatív számok** használatának a hőmérő. Ha a hőmérséklet  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  vagy  $0\text{ }^{\circ}\text{F}$  alá esik, a hőmérő negatív értéket mutat.

**Negatív szám:**

Minden nullánál kisebb szám. pl.: -3, -21.8, -40

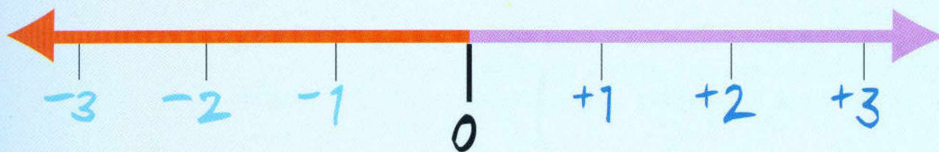
A negatív számok elé mindig ki kell tenni az előjelet (-). Hogy megkülönböztethessük az előjelet a kivonás műveleti jelétől, egy kicsit feljebb írjuk -3 helyett -3.



Használd a számológép +/- billentyűjét, ha egy szám előjelét meg akarod változtatni.

**Előjeles számok:**

Minden pozitív és negatív szám ide tartozik. Ezeket **számegyenesen** szokás ábrázolni, ahogy azt a lenti ábra mutatja. A számegyenes irányítottsága azért fontos, mert ezzel jelezzük a számok növekedésének irányát.



Előjeles számok a számegyenesen.

**Páros szám:**

Bármely **egész szám**, melyet maradék nélkül oszthatunk 2-vel. pl.: -2, 2, 4, 6

Páros szám minden olyan egész szám, melynek utolsó számjegye 0, 2, 4, 6 vagy 8. A 114, a 2748 és a 357 196 mindegyike páros.

**Páratlan szám:**

Minden olyan **egész szám**, melyet nem tudunk 2-vel elosztani úgy, hogy ne legyen maradék\*. Pl.: -1, 1, 3, 5

Páratlan szám minden olyan egész szám, melynek utolsó számjegye 1, 3, 5, 7 vagy 9. A 47, az 579 és a 82 603 mindegyike páratlan.

**Prímszám:**

Azok a számok, melyek csak 1-gyel és önmagukkal oszthatók. Az első tíz prímszám: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

A prímszámok száma végtelen, a sornak sosincs vége.

Fontos megjegyezni, hogy:

- az 1 nem prímszám
- a 2 az **egyetlen** páros prím

**Összetett szám:**

Minden olyan, 1-nél nagyobb egész szám, ami nem **prím**. pl.: 6, 9, 20, 27





**Négyzetszám:**

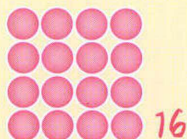
Olyan egész szám, melyet egy egész szám önmagával való összeszorításakor kapunk. (Ezt nevezzük a számok **négyzetének**.)

Pl.:  $4 \cdot 4 = 16$   
 $7 \cdot 7 = 49$   
 $-5 \cdot -5 = 25$

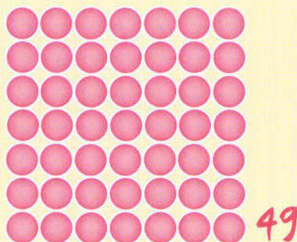
Az első tíz négyzetszám:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

A négyzetszámok sora végtelen. Azért nevezzük őket négyzetszámnak, mert négyzetté rendezve tudjuk őket szemléltetni.



A golyókkal kirakott 4 x 4-es négyzet szemlélteti a 16-ot, mint négyzetszámot.



A golyókkal kirakott 7 x 7-es négyzet szemlélteti a 49-et, mint négyzetszámot.

**Háromszög számok:**

Olyan pozitív egész számok\*, melyek egymást követő egész számok összegeként\* állíthatók elő.

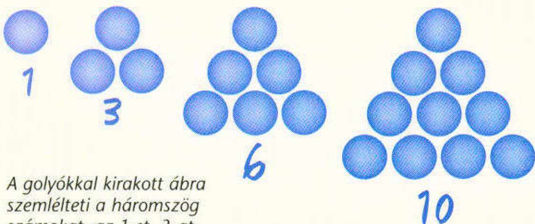
Pl.:  $1 = 1$   
 $1 + 2 = 3$   
 $1 + 2 + 3 = 6$   
 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Ezeket a számokat egy háromszöggel tudjuk szemléltetni. Minden új háromszöget úgy kapunk, hogy egy újabb sort teszünk az előző háromszöghöz.

Az első tíz háromszög szám:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55

A háromszög számok sora végtelen.



A golyókkal kirakott ábra szemlélteti a háromszög számokat, az 1-et, 3-at, 6-ot és 10-et.

**Köbszámok:**

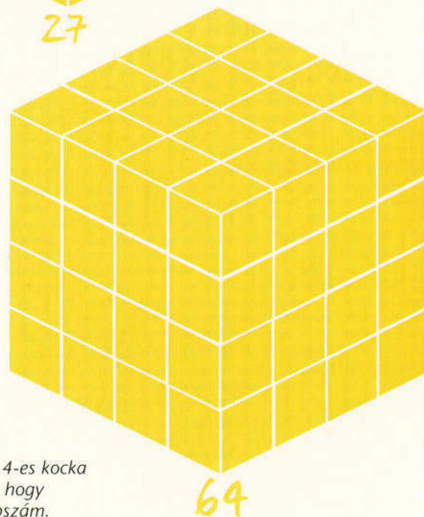
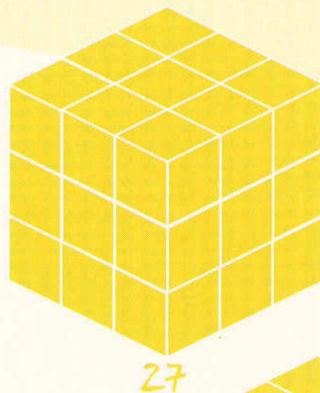
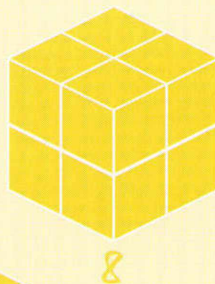
Olyan pozitív szám\*, melyet úgy kapunk, hogy egy egész számot megszorozunk önmagával, majd az eredményt még egyszer megszorozzuk az adott számmal. (Ezt nevezzük a számok **köbének**.)

Pl.:  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Az első tíz köbszám:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000

A köbszámok sora végtelen. Azért nevezzük őket köbszámnak, mert kocka segítségével tudjuk szemléltetni őket.



A 4 x 4 x 4-es kocka mutatja, hogy a 64 köbszám.



**Palindrom szám:**

Olyan szám, melyet akár balról jobbra, akár jobbról balra olvasva, ugyanazt kapjuk.

Pl.: 23 432.

**Pandigital számok:**

(Ilyen nálunk nem létezik, mint fogalom, de érdekes.)

Olyan szám, mely tartalmazza mind a tíz számjegyet, de csak egyszer:

pl.: 2 918 653 470.

**Racionális szám:**

Minden olyan szám, mely felírható két egész szám hányadosaként\* (számláló\* és nevező\*). Az egész számok lehetnek pozitívak\* vagy negatívak\*. Bármely véges tizedes tört\*, mint az 50,856 és bármely szakaszos tizedes tört\* mint a 0,3 felírható mint racionális szám.

$$\text{pl. } 50,856 = \frac{50856}{1000} \quad 0,3 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

**Irracionális szám:**

Azok a számok, melyek nem racionálisak, azaz nem írhatók fel normál tört alakban. Ilyenek a végtelen, nem szakaszos tizedes törtek\*. A  $\pi^*$  (pi) irracionális szám, mely úgy kezdődik, hogy 3,141592653.....

**Valós számok:**

A racionális és irracionális számok halmaza\*.

$\sqrt{2} = 1,41421356237\ldots$

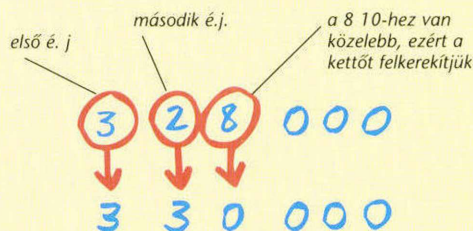
A négyzetgyök 2 (leírva): irracionális szám. Úgy kezdődik, hogy 1,414213562.... és folytatódik a végtelenségig.

**Értékes számjegy: (alaki érték)**

Egy szám számjegyei\* megmutatják a szám értékét bizonyos pontossággal. Az első – nem nulla – számjegy a legnagyobb értékű, függetlenül a számjegy értékétől.

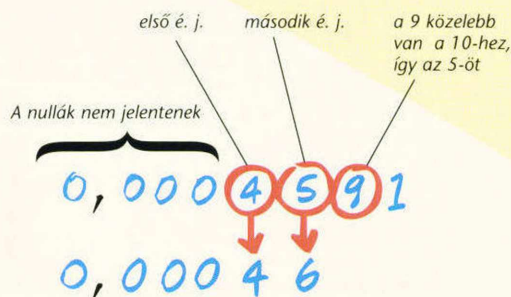
Pl.: a 4209-ben az első értékes számjegy a 4, ami azt mutatja, hogy a számban négy db ezres van, és még valami. A 9, bár ez a legnagyobb számjegy, csak kilenc darab egyest jelent, így itt a legkisebb értékű. Az első értékes számjegy után álló nullák már értékes jegynek számítanak.

Számításaink eredményét gyakran kerekítve\* adjuk meg. A kerekítés történhet egy, kettő, három stb. tizedes jegyre. A kerekítésnek is megvannak a szabályai. (Ha a kerekítendő számérték 5 vagy annál nagyobb, mindig felfelé, ha 5-nél kisebb, lefelé kerekítünk.) pl.: ha a 328 000-t két értékes jegyre kerekítjük, leírjuk a 3-at, és utána eldöntjük, hogy a 2-t felfelé vagy lefelé kerekítsük. Mivel a 2 után 8 áll, ami közelebb van a 10-hez, mint a nullához, így felfelé kerekítünk, és az eredmény 330 000 lesz.



Hasonlóan járunk el a tizedes törtknél.

Pl. a 0,0004591 esetén az első értékes jegy a 4. A nullák fontosak, mert mutatják a helyiértéket\*, de nem értékes jegyek. Ha ezt két tizedesre kerekítve írnanánk, 0,00046 lenne.





## Sorozatok

Amikor a számok valamilyen adott szabály vagy minta szerint követik egymást, számsorozatról beszélünk. Minden számot vagy formát, mely tagja a sorozatnak, a **sorozat** tagjának nevezzük. Ha nem ismerjük a szabályt, azt a sorozat első néhány tagjából meghatározhatjuk.

### Számtani sorozat:

Olyan sorozat, amely egy állandó\* értékkel nő vagy csökken. A  $2n-1$  képlet\* a következő sorozatot határozza meg:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

mely kettesével növekszik.

Ennek oka:

$$(2 \cdot 1) - 1 = 1$$

$$(2 \cdot 2) - 1 = 3$$

$$(2 \cdot 3) - 1 = 5 \text{ és így tovább.}$$

### Négyzetes sorozat:

Olyan sorozat, amely négyzetes kifejezést tartalmaz.

Az  $n^2+1$  képlet egy ilyen sorozatot ad meg:

$$2, 5, 10, 17, 26, \dots$$

$$1^2 + 1 = 2$$

$$2^2 + 1 = 5$$

$$3^2 + 1 = 10 \text{ és így tovább.}$$

Néhány esetben a szabályt úgy használhatjuk, mint egy képletet, ha a sorozat egy konkrét tagját akarjuk megkapni. A fenti esetben például, ha meg akarjuk tudni a sorozat 7. tagját, helyettesítsük be az  $n^2 + 1$  képletbe a 7-es számot:

$$7^2 + 1 = 50.$$

A sorozat bármely más tagját hasonló eljárással kapjuk meg.

### Fibonacci-sorozat:

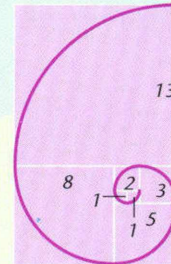
A sorozat: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...

Minden számot (a harmadiktól kezdődően) úgy kapunk meg, ha az előtte álló két számot összeadjuk. Például a sorozat következő eleme a 8 és a 13 összege, vagyis 21.

Bármely más sorozatot is képezhetünk a Fibonacci-sorozat mintájára, pl.: 7, 10, 17, 27...

A sorozat, melyet Leonardo Fibonacci ismert fel 1202-ben, gyakran megjelenik a természetben is.

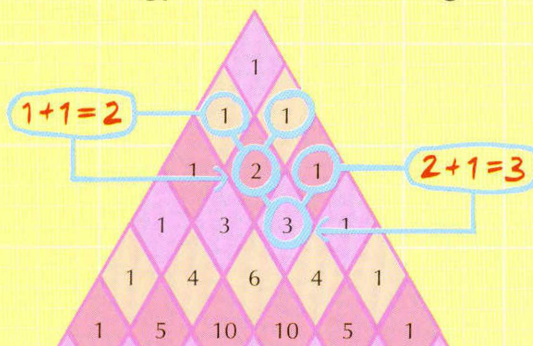
A Fibonacci-sorozatot egy kagyló csigavonalában is láthatjuk. Előállítható ez a spirál olyan négyzetek sorozataként, amelynek oldalai a Fibonacci-sorozatot követik (1, 1, 2, 3, 5 ...).



Elindulva az első négyzet csúcsából, rajzoljunk körvonalat, aztán a jobb felső sarkok felől a szemközti csúcshoz, majd így tovább a négyzeteket követve.

Az eredmény olyan spirál lesz, amilyen a kagylókon látható.

## Kínai vagy Pascal-háromszög



A Pascal-háromszög csúcsában 1 áll, és minden sora 1-gyel kezdődik és végződik. Minden más szám a háromszögben a felette álló két szám összege, mint  $3 + 3 = 6$ . A háromszöget már 1300-ban használták Kínában.

Csak később nevezték el Blaise Pascal (1623–62) francia matematikusról, aki felhívta rá a nyugati matematikusok figyelmét. A háromszög ábráját gyakran használják valószínűségek meghatározásához.



## Többszörösök

A **többszörös** egy adott egész szám egész szorozosa.

Pl.  $3 \cdot 2 = 6$ ,  $3 \cdot 4 = 12$ ,  $3 \cdot 6 = 18$ ,  
így a 6, 12 és 18 mind a 3 többszöröse.

### Közös többszörös

Olyan szám, mely két vagy több számnak is a többszöröse.

Pl.: a 2 többszörösei: 2, 4, 6, 8, 10, 12 ...

a 3 többszörösei: 3, 6, 9, 12, 15 ...

Így a 2-nek és a 3-nak közös többszöröse például a 6 és a 12.

Két vagy több szám **legkisebb közös többszöröse** (LKKT) a közös többszörösök közül a legkisebb. A 2 és 3 legkisebb közös többszöröse a 6.

## Osztók

Az **osztó** egy olyan egész szám, mellyel egy adott egész számot elosztva újra egész számot kapunk. Míg a prímszámoknak\* csak két osztójuk van (1 és önmaga), más számoknak több osztója is lehet, a 12-nek pl. az 1, 2, 3, 4, 6 és a 12 számok mindegyike osztója. Bármely egész szám felírható osztóinak szorzataként.

Pl.:  $12 = 2 \cdot 6$ ,  $12 = 3 \cdot 4$

### Közös osztó

Olyan szám, mely két vagy több számnak is osztója.

Pl.: a 15 osztói: 1, 3, 5, 15

a 40 osztói: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

A 15 és 40 közös osztói az 1 és az 5.

Két vagy több szám **legnagyobb közös osztója** (LNKO) a közös osztói közül a legnagyobb. A 15 és 40 legnagyobb közös osztója az 5.

### Prímosztó

Az osztók között vannak prímszámok\* is. A 12 osztói közül (1, 2, 3, 4, 6, 12) a 2 és a 3 prímszámok, ezeket nevezzük prímosztóknak.

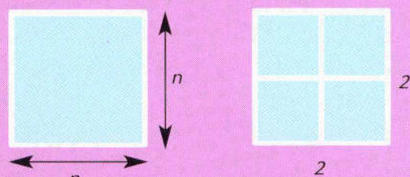
### Tökéletes számok

Olyan szám, mely egyenlő **osztóinak összegével\*** (kivéve önmagát),  
pl.:  $6 = 1 + 2 + 3$

## Gyökök

### Négyzetgyök

Egy szám négyzetgyöke azon osztója, melyet önmagával szorozva eredményül az adott számot kapjuk.



Az  $n^2$  négyzetgyöke  $n$ , ahol  $n^2$  egy négyzet területe. (az  $n$  a négyzet oldalának hossza)

Például  $2 \cdot 2 = 4$ , így a 2 a 4 négyzetgyöke.

Minden pozitív számnak\* két négyzetgyöke van: egy pozitív és egy negatív. (Ha megszorozzuk  $-4 \cdot -4$ , az eredmény akkor is 16.)

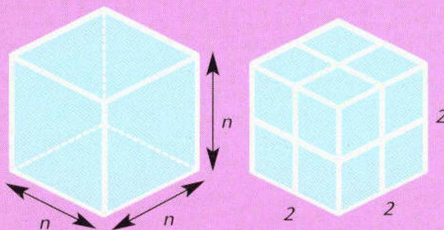
A négyzetgyökvonást a következő szimbólummal jelöljük:  $\sqrt{\quad}$ .  $\sqrt{9}$  jelenti a 9 pozitív négyzetgyökét, a  $-\sqrt{9}$  pedig a negatívát. A 9 pozitív és negatív négyzetgyökeit együtt úgy írhatjuk, hogy  $\pm\sqrt{9}$ .



Ezt a gombot használd a számológépeden, ha egy szám négyzetgyökét keresed!

### Köbgyök

Egy szám köbgyöke azon osztója a számnak, amelyet önmagával háromszor megszorozva, az adott számot kapjuk.



Az  $n^3$  köbgyöke  $n$ , ahol  $n^3$  egy kocka térfogata. ( $n$  a kocka élének hossza)

Pl.:  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ , így a 2 a 8 köbgyöke.

Bármely pozitív vagy negatív számnak csak egy köbgyöke van. A köbgyökvonást a következő szimbólummal jelöljük:  $\sqrt[3]{\quad}$ .



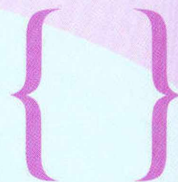
Ezt a gombot használd a számológépeden, ha egy szám köbgyökét keresed!





# HALMAZOK

A halmaz olyan elemek csoportja, amelyeknek van valamilyen közös tulajdonsága, vagy követnek valamilyen szabályt. A halmaz minden eleme egyedi: ugyanazt az elemet a halmaz csak egyszer tartalmazhatja. A halmazok arra használhatók, hogy megmutassák az elemek különböző csoportjai közötti kapcsolatokat.



A kapcsos zárójelek használatával jelezzük, hogy a beléjük írt elemek egy halmazhoz tartoznak.

## Halmazok jelölése

A halmaz elemeit **kapcsos zárójel**be tesszük, és vesszővel választjuk el őket egymástól.

Pl. {a, e, i, o, u}.

Ezt a módszert **felsorolásnak** nevezzük.

A sorrend, amelyben a halmaz elemeit felsoroljuk, nem fontos.

Pl. {a, e, i, o, u} = {a, e, i, o, u} és így tovább.

Nem szükséges, hogy a halmaz minden elemét feltüntessük. Ehelyett a kerek zárójelben azt a szabályt adjuk meg, amely alapján az elemek a halmazba kerülnek, pl. {**magánhangzók**}.

Ez különösen hasznos, amikor nagyon nagy halmazokkal kell dolgozni, pl. {egész számok 1-től 1000-ig}.

Halmazokat sokszor jelölünk egy betűvel.

Pl. A = {páros számok}

Néhány gyakran használt halmazt meghatározott betűvel jelölünk. Ezek:

$\mathbb{Z}$  = egész számok halmaza\*

$\mathbb{N}$  = természetes számok halmaza\*

$\mathbb{Q}$  = racionális számok halmaza\*

$\mathbb{R}$  = valós számok halmaza\*

## Halmaz elemei

Azok a dolgok, melyek hozzá tartoznak a halmazhoz. Az  $\in$  szimbólum azt jelenti, hogy „elem” a halmaznak. A  $\notin$  szimbólum pedig azt, hogy „nem elem”. Például az 1 természetes szám, úgy is írhatjuk, hogy  $1 \in \mathbb{N}$ . A -1 nem elem ennek a halmaznak, vagyis  $-1 \notin \mathbb{N}$ .

## Alaphalmaz

Olyan halmaz, amely tartalmazza a többi halmazt. Például ha a C halmaz = {mással-

hangzók}, akkor az alaphalmaz az ábécé.

Az alaphalmazt H-val jelöljük.  $H = \{\text{ábécé}\}$

## Véges halmaz

Olyan halmaz, mely véges számú elemet tartalmaz. Például, ha az A halmaz a 0 és 6 közé eső páratlan számok\* halmaza:

$$A = \{1, 3, 5\}$$

Az A halmaz véges halmaz, mert  $|A| = 3$  (ahol az  $|A|$  halmaz elemeinek számát jelenti).

## Végtelen halmaz

Olyan halmaz, amely végtelen számú elemet tartalmaz. Például a páratlan számok\* halmaza végtelen halmaz, sosem fejeződik be. Úgy jelezhetjük egy halmaz végtelenségét, hogy leírjuk az első néhány tagot, és utána pontokat teszünk.

Pl.  $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

B egy végtelen halmaz, mivel  $|B| = \infty$  (ahol  $|B|$  a halmaz elemeinek száma és a  $\infty$  jel jelenti a végtelenséget).

## Üres halmaz

Olyan halmaz, amely nem tartalmaz elemet. Például X halmaz = {a hét napjai, amelyek „J” betűvel kezdődnek} üres halmaz. Az üres halmazt így írjuk {}, vagy  $\emptyset$  jellel jelöljük, azaz úgy is írhatjuk a példát, hogy  $X = \{\}$  vagy  $X = \emptyset$ .

## Részhalmaz

Olyan halmaz, amely egy másik halmazba is beletartozik. Például ha az A halmaz = {más-salhangzók} és B halmaz = {t, r, y}, akkor a B halmazt az A halmaz részalmazának nevezzük. A  $\subset$  jel jelenti azt, hogy „valaminek a részalmaz”, azaz ez a kapcsolat úgy írható, hogy  $B \subset A$ . Ha a C halmaz = {a, e, i}, az nem részalmaz az A-nak. A  $\not\subset$  jel jelenti azt, hogy „nem részalmaz valaminek”, azaz ez a kapcsolat úgy írható, hogy  $C \not\subset A$ .



## Halmazműveletek

A kapcsolatot két vagy több halmaz között az egyes halmazok elemeinek vizsgálatával lehet megállapítani, eldöntve, hogy vannak-e közös elemeik.

### Komplementer halmaz

Az összes olyan **elem** halmaza, amelyek nem szerepelnek egy bizonyos halmazban. Például, ha A tartalmazza a prímszámokat, akkor  $\bar{A}$  tartalmazza az összes nem prímeket. Ez ugyanaz, mintha azt mondanánk:  $\bar{A} = H - A$ , mivel a H alaphalmaz tartalmazza az összes számot. Az A halmaz komplementerét  $\bar{A}$ -nek írjuk.

### Halmazok uniója

Kettő vagy több halmaz elemeinek összessége. Ezt az  $\cup$  jel jelöli (neve **unió**). Például, ha  $A = \{2, 4, 6\}$  és  $B = \{1, 3, 5, 6\}$ , akkor  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

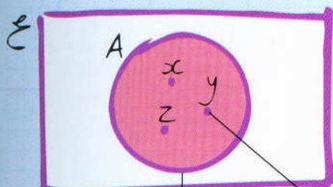
### Halmazok metszete

Olyan elemek, amelyek kettő vagy több halmazban is megjelennek. A metszetet a  $\cap$  jel jelöli (neve **metszet**). Például, ha  $A = \{2, 4, 6\}$  és  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , akkor  $A \cap B = \{2, 4\}$ .

### Venn-diagrammok

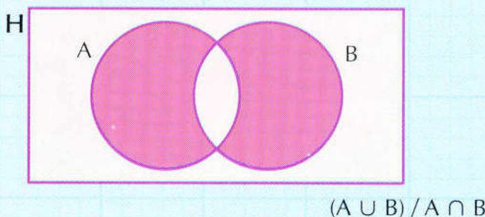
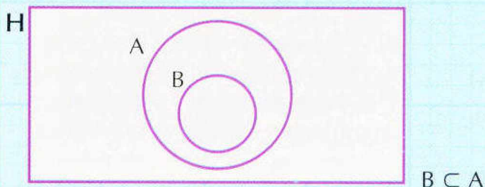
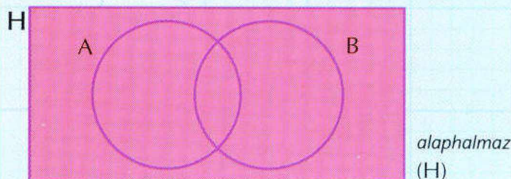
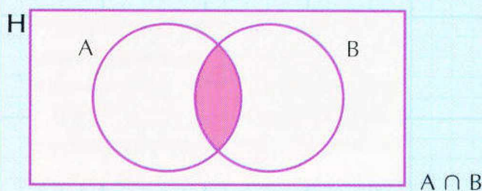
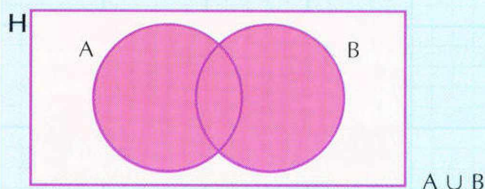
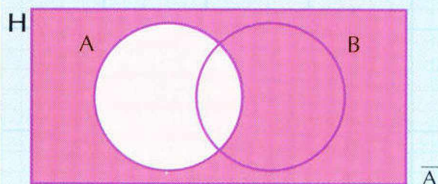
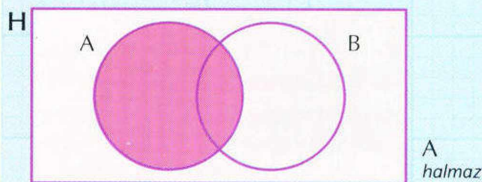
Egy Venn-diagram mutatja a halmazok közötti kapcsolatokat. A Venn-diagramban a halmazt általában egy kör jelöli, az **alaphalmaz** pedig egy téglalap. A halmaz **elemeit** gyakran pontok jelölik a körben. A diagram minden egyes része címkézett, és az aktuális rész be van színezve.

Venn-diagram



A pontok jelölik az A halmaz elemeit. Téglalap jelöli az alaphalmazt. Ez a kör jelöli az A halmazt, amely részhalmaza az általános halmaznak.

### Néhány Venn-diagram:





# SZÁMTAN

A **szám**tan a számok használatának képessége. Négy alpműveletet használunk: az **összeadást**, a **kivonást**, a **szorzást** és az **osztást**.

+

## Összeadás

A számológépen  
használd  
az össze-  
adás jelét,  
hogy végre-  
hajtsa a  
műveletet!

Az a matematikai művelet, amellyel két szám **összegét** kapjuk meg. Úgy is felfoghatjuk, hogy a megadott számot növeljük egy másikkal. Az összeadást  $a + b$  alakban adjuk meg.

$$P|_+ : 6 + 3 = 9$$

Az összeadás a **kivonás ellentettje**, fordított művelete, és vonatkozik rá az **asszociativitás** és **kommutativitás** szabálya.

---

## Kivonás

A számológépen  
használd a  
kivonás jelét,  
hogy végre-  
hajtsa a  
műveletet!

Az a matematikai művelet, mellyel két szám **különbségét** kapjuk meg. Úgy is felfoghatjuk, hogy az egyik számot csökkentjük a másikkal. A kivonást  $a - b$  alakban szokás megadni.

$$\text{Pl.: } 10 - 6 = 4$$

A kivonás az **összeadás ellentettje**, fordított művelete. Nem vonatkozik rá az **asszociativitás** és **kommutativitás** szabálya.

X

## Szorzás

A számológépen  
használd a  
szorzás jelét,  
hogy végre-  
hajtja a  
műveletet!

Az a matematikai művelet, mellyel két szám **szorzatát** kapjuk meg. Mint a fenti példában is látható, a szorzást  $a \cdot b$  alakban szokás megadni, de írhatjuk  $a \cdot b$  vagy (ha a mennyiségeket betűkkel fejezzük ki)  $ab$  alakban is.

A szorzás felfogható ismételt összeadásként is.

$$\text{Pl.: } 3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$$

vagy  $3 + 3 + 3 + 3 = 12$

A szorzás az **osztás ellentettje**, fordított művelete, és vonatkozik rá az **asszociativitás** és **kommutativitás** szabálva.

## Hosszú szorzás

A nagy számokkal való szorzás módszere számológép nélkül. A hosszú szorzást lépésekben lehet elvégezni. Azon a tényen alapszik, hogy minden számot fel lehet bontani századokra, tízesekre, egyesekre stb., amelyeket tartalmaz.

$$\text{Pl.: } 143 = (1 \cdot 100) + (4 \cdot 10) + (3 \cdot 1)$$

Így az egyik szám szorzása a másikkal ugyanolyan, mintha az első számot megszoroznánk a százasokkal, tízesekkel, egyesekkel, és végül összeadjuk az eredményeket.

Pl.: 736 · 143

$$= (736 \cdot 100) + (736 \cdot 40) + (736 \cdot 3)$$

Általában először a legnagyobb helyi értéken szereplő számot szorozzuk meg, majd a következő legnagyobbat, és így tovább, jobbról balra haladva.

A hosszú szorzások egyik levezetési módszerét az alsó példa mutatja. A magyarázatot (ami itt zárójelben van) nem szokás kiírni.

			7	3	6						
			x	1	4	3					
			<hr/>								
			7	3	6	0	0			(736 · 100)	
			2	9	4	4	0			(736 · 40)	
			2	2	0	8				(736 · 3)	
			<hr/>								
			1	0	5	2	4	8		(összeadott végeredmény)	







## Vegyes műveletek

Az összetett számítások többféle műveletet foglalnak magukba. Vegyes műveletek elvégzésekor vannak bizonyos szabályok, amelyeket be kell tartani.

Ha a feladatban csak összeadás\* és kivonás\* szerepel, lényegtelen, hogy milyen sorrendben oldjuk meg őket. Bár nem árt észben tartani, hogy a + vagy – jel csak a közvetlenül utána következő számra vonatkozik.

pl.  $7 - 5 + 10$   
 ugyanaz mint  $7 + 10 - 5$   
 vagy  $-5 + 7 + 10$

Ha a feladatban a műveletek más variációja is feltűnik, figyelembe kell venni a műveletek **elsőbbségi szabályát**, a **műveleti sorrendet**.

Például a feladat megoldásához:

$$6 + 40 : 20 \cdot (3 + 1)^2 - 3$$

számold ki a zárójelet:

$$6 + 40 : 20 \cdot (3 + 1)^2 - 3$$

hatványozz:

$$6 + 40 : 20 \cdot (4)^2 - 3$$

számold ki az osztást :

$$6 + 40 : 20 \cdot 16 - 3$$

számold ki a szorzást:

$$6 + 2 \cdot 16 - 3$$

számold ki az összeadást:

$$6 + 32 - 3$$

számold ki a kivonást:

$$38 - 3$$

így a válasz 35.

## Kerekítés

A **kerekítés** a számok becslésének egy módja, amelynek során 0-ra cserélődnek a számunkra értéktelen számjegyek. A becslés eredménye a megkívánt pontosság mértékétől függ.

A számokat kerekíthetjük a legközelebbi egész számra, tízesekre, százatokra és így tovább. Tizedes törtet\* gyakran kerekítünk egy vagy több tizedeshelyre. A számok kerekítésének módja sokszor attól függ, mit mérünk. Például egy ember magasságát gyakran a legközelebbi centiméterre kerekítjük, míg egy falu lakosságát a legközelebbi száz vagy ezer emberre.

### Számok kerekítéséhez

Keresd meg a szám azon részét, ahonnan kerekíteni akarsz, és nézd meg az attól jobbra eső utolsó számjegyet.

- Ha ez 5 vagy annál nagyobb, növel a számot 1-gyel a kerekítés miatt.
- Ha ez 4 vagy kevesebb, a kerekítendő szám ugyanaz marad.

Például a 276 tízesekre kerekítve 280 lenne, mert a 6 közelebb van 10-hez, mint a 0-hoz, és így 276 közelebb áll 280-hoz, mint 270-hez. A 4872 tízesekre kerekítve 4870 lenne, százatokra kerekítve pedig 4900.

### Felső határ

A legnagyobb érték, amelyet lefelé lehet kerekíteni egy bizonyos számra. Például, ha egy üvegben a babok száma tízesekre kerekítve 550, a valódi számuk 545-től 554-ig terjedően bármi lehet. Az 554-es érték a felső határ.

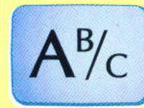
### Alsó határ

A legkisebb érték, amelyet felkerekíthetünk egy adott számra. Például, ha egy üvegben a babok száma tízesekre kerekítve 550, a valódi számuk 545-től 554-ig terjedően bármi lehet. Az 545-ös érték az alsó határ.



# TÖRTEK

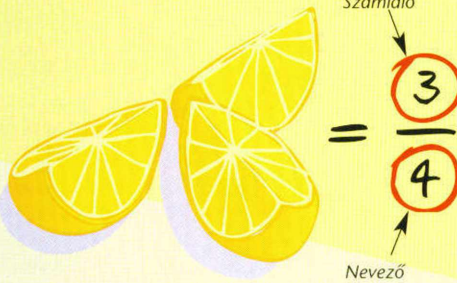
Amikor valami egyenlő részekre bomlik, a részeket **törteknek** nevezzük. Egy törtet kifejezhetünk úgy, hogy egy számot egy másik fölé írunk ( $\frac{x}{y}$ ). Az alsó számot ( $y$ ) **nevezőnek**, a felsőt ( $x$ ) **számlálónak** nevezzük.



*A<sup>B</sup>/C törtek beírásához ezt a gombot használjuk a számológépen.*

## Számláló

A tört felső része.  
A **számláló** jelenti a vizsgált részek számát. Például a jobb oldali kép 4 részből 3-at ábrázol, azaz egy egész narancs háromnegyedét, vagyis a számláló 3.



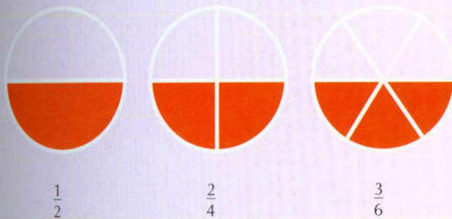
## Nevező

A tört alsó része.  
A **nevező** jelenti az egyenlő részek számát. Például a bal oldali kép 4 részből 3-at ábrázol, azaz egy egész narancs háromnegyedét, vagyis a nevező 4.

## Azonos értékű törtek

Törtek, amelyek egy egész azonos részeit jelölik, csak különböző módon írva.

A lenti körök különböző számú, de egyenlő részre lettek osztva. A kör kiemelt részei 3 egyenlő törtet ábrázolnak.



Végtelen számú azonos értékű tört létezik. A tört kifejezése vagy leírása azon múlik, hogy hány részre lett osztva az egész. Ha az egészet 20 részre osztottuk, a felét  $\frac{10}{20}$ -ként fejezhetjük ki.

Azonos értékű törteket kaphatunk úgy, hogy a számlálót és a nevezőt azonos számmal osztjuk vagy szorozzuk (ezt magyarul bővítésnek nevezzük).

$$\text{Pl.: } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{4} \qquad \frac{4}{8} = \frac{4}{8} : \frac{4}{4} = \frac{1}{2}$$

Amikor a számlálót és a nevezőt azonos számmal osztjuk el, a végeredményül kapott tört számlálója és nevezője kisebb lesz, mint az eredetié. Ezt a tört **egyszerűsítésének** nevezzük. Amikor egy tört számlálóját és nevezőjét a lehető legkisebb számra egyszerűsítjük, akkor a „**leggyyszerűbb alakjára**” hozzuk.

Egyszerű módja a törtek összehasonlításának, ha a legkisebb **közös nevezőre** bővítjük őket, ami a két nevező legkisebb közös többszöröse. Például az  $\frac{1}{2}$  és a  $\frac{2}{6}$  legkisebb közös nevezője a 6, vagyis a törteket  $\frac{3}{6}$  és  $\frac{2}{6}$  formában fejezhetjük ki.





## Egyszerű tört

Olyan törtszám, melynek számlálójában\* és nevezőjében\* egész szám van. Ez a törték leggyakoribb írásmódja.

$$\text{Pl.: } \frac{1}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{46}{19}$$

## Emeletes / Többszörös tört

Olyan törtszám, mely rendelkezik számlálóval\* és/vagy nevezővel\*, a melyek maguk is törték.

$$\text{Pl.: } \frac{2}{\frac{3}{5}} \quad \frac{\frac{1}{4}}{2} \quad \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{8}}$$

## Valódi tört

Olyan törtszám, melynek értéke kisebb egy-nél. Ide tartozik minden olyan törtszám, melynek számlálója\* kisebb, mint a nevezője\*.

$$\text{Pl.: } \frac{1}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{40}{71}$$

## Nem valódi tört

Olyan törtszám, melynek értéke nagyobb egy-nél. Ide tartozik minden olyan szám, melynek a számlálója\* nagyobb, mint a nevezője\*.

$$\text{Pl.: } \frac{3}{2} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{412}{4}$$

## Vegyesszám

Olyan szám, mely egy egész számból és egy valódi törtszámból áll. A vegyesszámok **nem valódi törtként** is kifejezhetők. Például  $1\frac{1}{2}$  egy vegyesszám, ami nem valódi törtként is kifejezhető, mint  $\frac{3}{2}$ .

## Szám reciproka

Egy számot 1-gyel elosztva az adott szám reciprokát kapjuk. Például 3-nak a reciprokát

Ahhoz, hogy egy törtszám reciprokát megkapjuk, egyszerűen fordítsuk meg a számot. Például  $\frac{3}{4}$  reciprokát  $\frac{4}{3}$ , mert:

$$1 : \frac{3}{4} = \frac{1}{1} : \frac{3}{4} = \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

 $\frac{1}{x}$ 

Használd a reciprok gombot a számológépeden, hogy megkapd egy szám reciprokát!

## Törték és százalékok

A törték százalék\* formájában is kifejezhetjük, ami megmutatja, hogy a szám hányad része a 100-nak.

Például a 25% azt jelenti, hogy  $\frac{25}{100}$ .

Minden törtet át lehet alakítani százalékos formára, ha a törtet egyszerűen megszorozzuk százzal.

$$\text{Pl.: } \frac{1}{2} = (\frac{1}{2} \cdot 100)\% = 50\%$$

$$\frac{3}{4} = (\frac{3}{4} \cdot 100)\% = 75\%$$

A százalékot is át lehet alakítani törtes formára, ha elosztjuk százzal, és a lehető legegyszerűbb alakra\* hozzuk.

$$\text{Pl.: } 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

## Műveletek törtékkel

### Törték összeadása

Hozzuk a legkisebb közös nevezőre\* a törték, majd adjuk össze a számlálókat\*.

$$\text{Pl.: } \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

### Törték kivonása

Hozzuk a legkisebb közös nevezőre\* a törték, majd vonjuk ki a számlálókat\*.

$$\text{Pl.: } \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

### Törték szorzása

Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálót\* a számlálóval, a nevezőt\* a nevezővel szorozzuk meg.

$$\text{Pl.: } \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$$

Vegyesszámok szorzásához először át kell alakítani azokat **nem valódi törtékké**.

### Törték osztása

Törtet törttel úgy osztunk, hogy az osztandót megszorozzuk az osztó reciprokával.

$$\text{Pl.: } \frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 3} = \frac{8}{6} = 1\frac{2}{6} = 1\frac{1}{3}$$

Vegyesszámok osztásához először át kell alakítani őket **nem valódi törtékké**.



# TIZEDESTÖRTEK

A **tizedes rendszer** tízes alapú rendszer. Az olyan számot, amely ezt a rendszert használja, tizedestörtnek hívjuk. Ez a kifejezés általában olyan számra utal, amelynek minden olyan része, amely kisebb egy egész számnál, a **tizedespont** (**tizedesvessző**) mögött helyezkedik el, például 1,2 vagy 59,635 vagy 0,0091.

Az alábbi diagram a számjegyek helyiértékét\* mutatja meg a 6539,023 példáján.

Ezresek	Százások	Tízesek	Egyesek	Tizedek	Századok	Ezredek
6	5	3	9	,	0	2
					3	

Tizedespont/vessző

A tizedesponttól indulva a bal oldalon minden egymást követő helyen a tíz következő hatványai állnak növekvő sorrendben. A jobb oldalon minden egymást követő helyen a tíz csökkenő hatványai vannak.

## A tizedesek helye

A számok a **tizedespont** után helyezkednek el. Az első hely a tizedeket, a második a századokat jelöli stb.

## Tizedestört

Minden egynél kisebb szám kifejezhető **tizedestörteként**. Például 0,375 tizedestört, ami átalakítva:

$$0 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$$

A tizedestörteket egyszerűen **tizedeseknek** is hívjuk.

## Vegyes tizedestört

Olyan szám, mely egy egész számból\* és egy **tizedestörtből** áll. Például 15,76 vegyes tizedestört, amely felírható  $15 + \frac{7}{10} + \frac{6}{100}$  alakban.

## Véges tizedestört

Olyan **tizedestört**, amely véges sok **tizedes jegyet** tartalmaz.

Pl.:  $\frac{1}{2} = 0,5$  tizedestörteként

$$\frac{17}{625} = 0,0272 \text{ tizedestörteként}$$

Jegyezzük meg, hogy ezeknek a törteknek nevezője\* is van, ami 2 vagy 5 többszöröse\*. Ez igaz minden tört alakban levő véges tizedestörré.

## Tizedespont

Olyan pont, amely elválasztja az egészeket és a tizedeket. Ez a számok között is elhelyezkedhet középen (pl.: 1·2), de manapság inkább a vonalon helyezkedik el (pl.: 1.2). Néhány országban a pont helyett vesszőt használnak, hogy elkerüljék a félreértéseket, mivel ők a pontot a szorzás kifejezésére használják. Mi is ezt tesszük!

## Végtelen tizedestört

Olyan **tizedestört**, amely megszámlálhatatlan **tizedes jegyet** tartalmaz. Két fajtája van: a **nem szakaszos** és a **szakaszos tizedestört**.

## Nem szakaszos tizedestört

Olyan **végtelen tizedestört**, melyben a **tizedesvessző** után levő számsorozat nem ismétlődik. Ilyen például a Pi ( $\pi$ ), ami úgy kezdődik, hogy 3,141 592 653...

## Szakaszos tizedestört

Olyan **tizedestört**, melyben a **tizedesvessző** után levő számsorozat **végtelenül** ismétlődik.

$$\text{Pl.: } 3,333\ 333\ldots \\ 0,125\ 125\ 125\ldots$$

A szakaszos tizedestörtek végtelenül ismétlődő része fölé egy pontot tesznek, vagy a pontot az első és az utolsó ismétlődő szám fölé teszik. Tehát a fenti példák alakja 3,3̄ és 0,125̄.





## Műveletek tizedestörtekkel

### Tizedestörtek összeadása és kivonása

A tizedestörtek\* összeadását, illetve kivonását megkönnyíti, ha a tizedesvesszőket\* egy oszlopba írva írjuk fel a számokat egymás alá.

Pl.:  $11,45 + 17 + 2,5$  leírva:

A tizedesvesszőket  
egy oszlopba

	1	1	,	4	5
	1	7	,	0	0
+		2	,	5	0
<hr/>					
	3	0	,	9	5

Akárcsak az egész számok összeadásánál, itt is jobbról balra haladva végezzük el a műveletet.

Pl.:  $50,19 - 36,2$  írásban:

A tizedesvesszők egy  
oszlopba kerüljenek

	5	0	,	1	9
-	3	6	,	2	0
<hr/>					
	1	3	,	9	9

Ahogy az egész számok kivonásánál, most is jobbról balra haladva dolgozunk.

### Tizedes törtek osztása

A tizedesvesszők\* elhagyásával egész számokat kapunk (ezzel egyben az is biztosított, hogy az így kapott számok a 10 ugyanazon **hatványával** növekedtek). Ezután oszd el a számokat: az eredmény ugyanannyi, mintha a tizedestörteket\* osztottad volna egymással.

Pl.:  $3,2 : 0,4$

$$\begin{array}{r} \cdot 10 \\ 3,2 \\ \hline 0,4 \end{array} = \begin{array}{r} 32 \\ \hline 4 \end{array} = 8 \quad \begin{array}{r} \cdot 10 \end{array}$$

### Tizedestörtek szorzása

Hagyd el a tizedesvesszőt\*, és szorozd össze őket, mintha egész számok lennének. Majd jelöld a tizedesvesszőt az osztandók összes helyi értékének\* megfelelően.

Pl.:  $3,5 \cdot 2,36$

(1 tizedesjegy) (2 tizedesjegy)

Számolásnál:  $35 \cdot 236$

			3	5	
x	2	3	6		
<hr/>					
	2	1	0		(35 · 6)
	1	0	5	0	(35 · 30)
	7	0	0	0	(35 · 200)
<hr/>					
	8	2	6	0	(add össze a számokat)

Tehát:  $3,5 \cdot 2,36 = 8,260$

(1 tizedesjegy) + (2 tizedesjegy) = (3 tizedesjegy)

### Tizedestörtek kerekítése

A tizedestörtekkel\* való számolásnál szükségünk lehet a számok felfelé vagy lefelé kerekített\* értékére. Ezt pontosan ugyanúgy tesszük, ahogy az egész számoknál: kerekítjük a számot a legközelebbi tizedekre, századokra vagy ezredekre, attól függően, hogy hány tizedesjegyig\* szükséges. Például a 63,5378 számos módon kerekíthető:

63,538 (ezredekre)

63,54 (századokra)

64 (egyesekre).

### A kerekítési hiba

A kerekítéssel bizonyos fokú pontatlanság is együtt jár. Pl.: ha a 0,69473-at 0,69-re kerekítjük, a kerekítési hiba  $0,69473 - 0,69$ , ami nem kevesebb, mint 0,00473. Általános szabály, hogy nem szoktunk sem felfelé, sem lefelé kerekíteni a számolás befejezéséig. Minden egyes részeredmény kerekítéssel pontatlanabb lesz.



# HATVÁNYOZÁS ÉS NORMÁLALAK

Nem könnyű igazán nagy vagy éppen nagyon kicsi számokkal számolni. A **hatványozás** és a normál alak\* segíti az ilyen számokkal való műveleteket.

## A kitevő

A számjegy jobb felső sarkába írt kisebb szám, amely az önmagával való szorzást jelenti. Ez a kis index mutatja meg, hogy az adott szám hányszor szerepel tényezőként a szorzatban.

Pl.:  $a^2 = a \cdot a$

$a^3 = a \cdot a \cdot a$

(ahol „a” egy tetszőleges számot jelöl)

Vagyis:  $4^2 = 4 \cdot 4$

$6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ .

Ha negatív szám van a kitevőben, akkor a szám reciprokának nevezőjébe a pozitív előjelű kitevőt írjuk.

Pl.:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(ahol „a” és „n” egy tetszőleges valós szám)

Vagyis:  $6^{-2} = \frac{1}{6^2}$

## Törtkitevő

Amennyiben a kitevőben törtszám\* áll, az egészen mást jelent, mintha egész szám lenne. pl.  $5^{\frac{1}{3}}$  ugyanazt jelenti, mint a  $\sqrt[3]{5}$  (lásd a hatványozás azonosságait a 22. oldalon).

## Hatvány

A felső indexszel\* ellátott szám értéke.

Pl.:  $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

Tehát a 16 a 4 második hatványa.

A „hatvány” kifejezést gyakran használjuk a „kitevő”\* helyett.

Például a  $4^2$  esetében azt mondjuk:

„a négyet második hatványára emelve”.

Amikor egy számot annak második hatványára emelünk, azt is lehet mondani, hogy a négyzetére\* emeltük. Hasonlóképpen egy szám harmadik hatványát a szám köbének szokás mondani.

$x^2$

$xy$

Használd a zsebszámológép e billentyűit, hogy könnyen négyzetre vagy bármely más kitevőre tudj emelni a megadott számokat.

E kifejezés kiírása sok helyet igényelne, ezért egyszerűbb, ha a hatványalakot\* használjuk:  $6^{12}$ , sokkal rövidebb és könnyebben átlátható.





## A hatványozás azonosságai

Azokat a szabályokat, melyeket a hatványozás során alkalmazunk, a **hatványozás azonosságainak** nevezzük.

1. Azonos alapú hatványok\* szorzásakor a kitevők összeadódnak.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

ahol  $a$ ,  $n$  és  $m$  tetszőleges számok

Pl.:  $4^2 \cdot 4^4 = 4^6$

mert  $4^2 \cdot 4^4 = (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = 4^6$

Ezt a módszert nem alkalmazhatjuk, ha az alapok különböző számok.

2. Azonos alapú hatványok\* osztásakor a kitevők kivonódnak.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

ahol  $a$ ,  $n$  és  $m$  tetszőleges számok

pl.:  $3^6 : 3^2 = 3^4$ ,

mert  $3^6 : 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) : (3 \cdot 3) = 3^4$

Különböző alapú hatványok esetén ez a módszer nem használható.

3. Minden szám első hatványa\* önmaga

$$a^1 = a$$

ahol  $a$  tetszőleges szám.

Pl.:  $3^1 = 3$

4. Az 1-nek minden hatványa\* 1.

$$1^n = 1,$$

ahol  $n$  tetszőleges szám.

Pl.:  $1^6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

5. Minden szám nulladik hatványa\* 1. Ezt néha a **null-hatványszabálynak** mondjuk.

$$a^0 = 1,$$

ahol  $a$  tetszőleges szám.

Pl.:  $2^0 = 1,$

mert (a 2. szabályt alkalmazva):

$$\frac{a^m}{a^m} = 1 \text{ és } \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0,$$

ebből következik, hogy  $a^0 = 1$ .

6. Hatvány\* hatványozásakor a kitevők összeszoródnak.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m},$$

ahol  $a$ ,  $n$  és  $m$  tetszőleges szám.

Pl.:  $(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6,$

mert  $(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^6$

7. Szorzat hatványozásakor\* a tényezőket külön-külön hatványozzuk.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n,$$

ahol  $a$ ,  $b$  és  $n$  tetszőleges számok.

Pl.:  $(5 \cdot 3)^2 = 5^2 \cdot 3^2$

mert  $(5 \cdot 3)^2 = 15^2 = 225,$

és  $5^2 \cdot 3^2 = 25 \cdot 9 = 225$

8. Hányados hatványozásakor\* a tört szám-lálóját és nevezőjét is hatványozni kell.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

ahol  $a$ ,  $b$ , és  $n$  tetszőleges számok, de  $b$  nem lehet 0.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3},$$

mert  $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64},$

és  $\frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$

9. A tört kitevőjű hatványokkal\* ugyanúgy végezhetjük a műveleteket (szorzás, osztás), mint más kitevőknél.

Pl.:  $6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 6^1 = 6$

Ebből következik, hogy mivel  $6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}} = 6$ , így a  $6^{\frac{1}{2}}$  épp 6-nak a négyzetgyöke\*, amit úgy is írhatunk, hogy

$$6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}.$$

Ezt akkor is alkalmazhatjuk, ha a kitevő\*  $\frac{1}{3}$ .

Pl.:  $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 5^1 = 5$

Vagyis  $5^{\frac{1}{3}}$  az 5-nek a köbgyöke\*. Ezt a szabályt úgy is írhatjuk, hogy

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

Az általános szabály tört kitevőjű hatványok esetén:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \text{ és } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$



## Normál alak

A **normál alak** a számok  $a \cdot 10^n$  forma szerinti felírása, ahol a 1-nél nagyobb vagy egyenlő, és kisebb, mint 10.

Pl.:  $63\,000 = 6,3 \cdot 10^4$

A normál alakot **exponenciális** vagy **tudományos alaknak** nevezik.

A normál alakot úgy kaphatjuk meg, hogy tegyünk tizedesvesszőt\* a két legmagasabb helyi értékű\* számjegy közé. Ez lesz az 1 és 10 közötti szám. A 10 kitevőjét\* úgy határozzuk meg, hogy megszámláljuk, hány számjeggyel mozdítottuk el a tizedes pontot jobbra vagy balra. Ha az új szám kisebb, mint az eredeti, akkor a tíz kitevője pozitív lesz, mivel a számot növelnünk kell ahhoz, hogy visszakapjuk az eredeti alakját. Ha az új szám nagyobb, mint az eredeti, a tíz kitevője negatív lesz.

Pl.: 683 000 000 átírva normál alakra:

A tizedesvessző helye az új számban

A tizedesvessző helye az eredeti számban

6,83000000  $\times 10^8$

A tizedesvessző 8 helyi értékkel ment balra

A Hold tömege\*  
23 számjegyet igényelne,  
ha kg-ban akarjuk megadni. Könnyebb  
normál alakban felírni,  $7,37 \cdot 10^{22}$  kg.

0,000 058 42 normál alakja:

A tizedesvessző helye az eredeti számban

A tizedesvessző helye az új számban

000005,842  $\times 10^{-5}$

A tizedesvessző 5 helyi értékkel ment jobbra.

A normál alak hasznos lehet nagyon nagy, illetve nagyon kis számok összehasonlításakor. Például 97 430 000 000-t normál alakban írva  $9,743 \cdot 10^{10}$  és a 785 300 000-nek a normál alakja:  $7,853 \cdot 10^8$ . Összehasonlítva a kitevőket\*, láthatjuk, hogy  $10^8$  kisebb, mint  $10^{10}$ , így máris ismerjük a két szám nagyságrendi viszonyát.

### Számológép és a normál alak

A számológépek gyakran használják a számok normál alakját, ha az eredeti, túl hosszú lenne a kijelzőhöz képest.

A tudományos számológépek többféle módon szokták jelölni a normál alakot. Gyakran használják az „E”, „EE”, „EX” vagy „EXP” gombokat a „szorozva 10 a valahányadikon” rövidítésére. Különböző normál alak kijelzések:

$1,4567 \text{ EXP } 12$  azt jelenti, hogy  $1,4567 \cdot 10^{12}$   
 $5,856 \text{ EX } -6$  azt jelenti, hogy  $5,856 \cdot 10^{-6}$   
 $32,25^9$  azt jelenti, hogy  $32,25 \cdot 10^9$

**EXP**

Ezt a gombot használd a számológépen, ha **normál alakkal** akarsz számolni.





# ARÁNY, ARÁNYOSSÁG

Az **arány** két mennyiség összehasonlítása sajátos formában. Például, ha egy teremben három lány és nyolc fiú van, azt mondhatjuk, hogy a lányok és fiúk aránya három a nyolchoz, vagy hogy a fiúk és lányok aránya nyolc a háromhoz.

Az arányt kettősponttal jelöljük (:), így a nyolc a háromhoz arányt  $8 : 3$ -nak írjuk. Ezt akár tört alakban is írhatjuk:  $\frac{8}{3}$ .



A csillagok és körök aránya 5 : 4.

## Egységarány

Olvasó arány, melyben az egyik szám az 1.  
Pl.  $1 : 3$  vagy  $8 : 1$

## Több mennyiség aránya

Az arány két mennyiség viszonya, de írható pl. hármass összefüggés is.  $a : b : c$  rövidített írásmódja három aránypárnak,  $a : b$ ,  $b : c$  és  $a : c$ .

## Egyenlő vagy ekvivalens arányok

Két vagy több arány is adhatja ugyanazt az értéket. Például  $4 : 6$  és  $8 : 12$  ekvivalens arányok, mivel mindkettő **leegyszerűsíthető**  $2 : 3$ -ra. Hogy megtaláljuk az egyenlő arányokat, szorozzuk vagy osszuk az arány mindkét oldalát ugyanazzal a **konstans** számmal.

Pl.: néhány egyenlő arány a  $2 : 4$ -gyel  
 $1 : 2$  (osztunk 2-vel)  
 $4 : 8$  (szorzunk 2-vel)

## Arányok összehasonlítása

Írjuk át az arányokat törtékké\*, hozzunk közös nevezőre\*, és hasonlítsuk össze az így kapott törteteket.

Például, ha meg akarjuk tudni, hogy melyik arány a nagyobb –  $3 : 4$  vagy  $5 : 6$  –, először írjuk őket tört alakba, majd hozzuk őket közös nevezőre\*.

$$3 : 4 = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \quad \text{és} \quad 5 : 6 = \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

Mivel a  $\frac{10}{12}$  nagyobb, mint a  $\frac{9}{12}$ , az  $5 : 6$  arány nagyobb, mint a  $3 : 4$ .

Ha egy arány mindkét oldalán ugyanolyan mennyiség áll, pl. hosszúság, akkor ellenőrizni kell, hogy azonosak-e a mértékegységek.

Ha át kell váltani, érdemes a nagyobb mértékegységről a kisebbre váltani.

Pl.:  $1 \text{ m} : 47 \text{ cm} = 100 \text{ cm} : 47 \text{ cm} = 100 : 47$

## Arányok egyszerűsítése

Arányokat gyakran egyszerűsítünk azért, hogy kisebb számokat kapjunk, vagy hogy törték\* helyett egészekkel dolgozzunk. Az arány egyszerűsítéséhez osszuk vagy szorozzuk az arány mindkét oldalát ugyanazzal a számmal, így az értéke nem változik. Amikor az arány mindkét oldala a lehető legkisebb, de még egész szám, a **legegyszerűbb alakról** beszélünk.

## Egyszerűsítés egész számokat tartalmazó arányokban

Ha szükséges, egyeztessük a mértékegységeket az arány mindkét oldalán. Az egyszerűsítést a két oldal legnagyobb közös osztójával\* végezzük.

Pl.: hozzuk a legegyszerűbb alakra a  $40 \text{ min} : 2 \text{ h}$  arányt

$$\begin{aligned} 40 \text{ min} : 2 \text{ h} &= 40 \text{ min} : 120 \text{ min} \quad (2 \text{ h} = 120 \text{ min}) \\ &= 40 : 120 \\ &= 1 : 3 \quad (40\text{-nel osztva}) \end{aligned}$$

Így  $40 \text{ min} : 2 \text{ h}$  aránya  $1 : 3$ .

Ha a szereplő számoknak nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk\*, pl.:  $7 : 9$ , akkor az már a legegyszerűbb alak.

## Egyszerűsítés olyan arányban, mely törtet tartalmaz

Ha szükséges, egyeztessük a mértékegységeket az arány mindkét oldalán. Aztán szorozzuk meg a törtet\* úgy, hogy egész számot kapjunk, majd ezzel a számmal szorozzuk meg az arány másik oldalát is. Pl.:  $\frac{1}{2} : 2$

Arány egyszerűsített formájához szorozzuk meg mindkét oldalt 2-vel.

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad \text{és} \quad 2 \cdot 2 = 4$$

Így az  $\frac{1}{2} : 2$  arány legegyszerűbb alakja  $1 : 4$ .



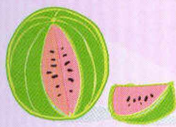
## Arányosság

Ha két olyan mennyiség változik, melyek között összefüggés van, azt mondjuk, hogy **arányosak** egymással. Az arányosságot  $\propto$ -val jelöljük.

### Egyenes arányosság

Ha két mennyiség között olyan a kapcsolat, hogy ahányszorosára növekszik az egyik, ugyanannyiszorosára fog nőni a másik, akkor egyenes arányosságról beszélünk. Hasonlóan, ha az egyik csökken, a másik ugyanolyan arányban csökken.

Például, ha egy dinnye 8 embernek lenne elég, akkor az arány  $1 : 8$ .



Két dinnye már 16 embernek elég ( $2 \cdot 8$ )

Fél dinnye csak négy embernek elég ( $\frac{1}{2} \cdot 8$ ). Az emberek és a dinnyék száma **egyenesen arányos**.



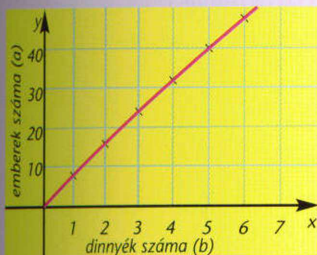
Amikor egy  $a$  mennyiség egyenesen arányos egy  $b$  mennyiséggel, úgy írhatjuk, hogy  $a \propto b$ . Az állandót **arányossági tényezőnek** nevezzük, és az összefüggést így írhatjuk fel:

$$a = kb,$$

ahol  $k$  az arányossági tényező.

A fenti példában az emberek ( $a$  mennyiség) és a dinnyék számának ( $b$  mennyiség) aránya  $8 : 1$ , így az arányossági tényező  $8$ . Ez azt mutatja, hogy az emberek száma mindig a dinnyék számának nyolcszorosa.

A grafikon azon emberek számát mutatja, hogy hányan kellene az adott mennyiségű dinnye megevééhez.



Ha az  $a$  és  $b$  mennyiségeket egy diagramon\* ábrázoljuk, egy olyan egyenest kapunk, mely áthalad az origón  $(0,0)$  és meredeksége\*  $k$ .

## Fordított arányosság

Ha két mennyiség között olyan a kapcsolat, hogy ahányszorosára növekszik az egyik, ugyanannyi részére fog csökkenni a másik, akkor fordított arányosságról beszélünk. Hasonlóan, ha az egyik csökken, a másik ugyanolyan arányban nő.

Például a lenti táblázat azt mutatja, hogy mennyi ideig tart egy autónak a 120 km-es távolság megtétele különböző sebességeknél.



120 km				
Sebesség (km/h)	20	40	60	80
Idő (óra)	6	3	2	1.5

Ez tehát egy példa a fordított arányosságra: az utazás ideje csökken, ha a sebesség nő, azaz az utazás időtartama és a sebesség fordítottan arányos.

Amikor egy  $a$  mennyiség és egy  $b$  mennyiség fordítottan arányos, így írhatjuk:  $a \propto \frac{1}{b}$ . A kapcsolatot úgy is írhatjuk, hogy:

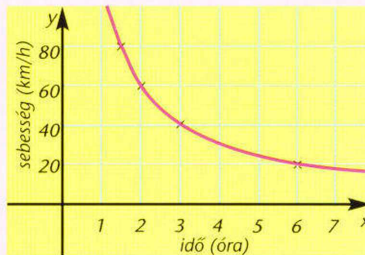
$$a = \frac{k}{b} \text{ vagy } a \cdot b = k,$$

ahol  $k$  az arányossági tényező.

A fenti példában az idő ( $a$  mennyiség) és a sebesség ( $b$  mennyiség) szorzata mindig ugyanaz a szám ( $2 \cdot 60 = 120$ ,  $3 \cdot 40 = 120$ ), így az arányossági tényező  $120$ . Ez azt jelenti, hogy 120 km-es út esetén az időt megkaphatjuk, ha a 120-at elosztjuk a sebességgel. Minden fordított arányosság esetén érvényes a következő szabály:

**Két fordítottan arányos mennyiség szorzata mindig állandó.**

A grafikon mutatja a 120 km-es távolság megtételéhez szükséges időket változó sebesség esetén.



Ha ábrázoljuk az  $a$  és  $b$  mennyiséget, egy olyan görbét kapunk, melynek neve: **hiperbola\***.





## Arányossági feladatok megoldása

### Egy mennyiség adott arányú felosztása

- Adjuk össze az összes számot, amely az arányosságban\* szerepel, hogy megkapjuk a részek számát!
- Osszuk el az adott mennyiséget a kapott értékkel, így megkapjuk egy rész nagyságát!
- Szorozzuk meg az arányban\* szereplő számokat az egységnyi rész nagyságával, így megkapjuk a keresett értékeket!

Például, ha egy háromszög  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  szögeire teljesül, hogy arányuk  $4 : 3 : 5$ , mekkorák ezek a szögek?

A részek összege:  $4 + 3 + 5 = 12$

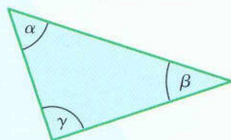
A háromszög belső szögeinek összege:  $180^\circ$

Egy rész:  $\frac{180}{12} = 15^\circ$

Tehát az  $\alpha = 4 \cdot 15 = 60^\circ$

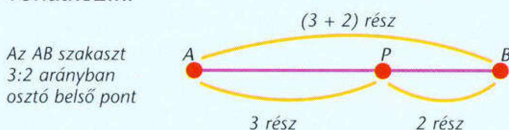
$\beta = 3 \cdot 15 = 45^\circ$

$\gamma = 5 \cdot 15 = 75^\circ$

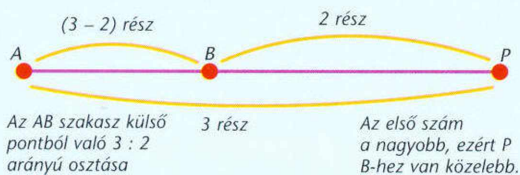


### Szakasz adott arányú felosztása

Egy szakaszt kívülről és belülről is oszthatunk adott arányban\*. Ha a P pont A és B között van, tehát elválasztja őket, azt mondjuk, hogy P az AB szakaszt belülről **osztó pont**. Az első szám az AP, a második a PB arányára vonatkozik.



Ha a P pont az AB szakaszon kívül van, **külső osztásról** beszélünk. Ha az első arányszám nagyobb, mint a második, akkor P közelebb van B-hez, mint A-hoz, és P az AB szakasz B-n túli meghosszabbításán van.



Ha a második szám a nagyobb, a P pont A-hoz van közelebb, és a BA meghosszabbításán fekszik.



Az AB szakasz külső pontból való 2 : 3 arányú osztása

### Egységes módszer

Eljárás olyan feladatok megoldásához, melyekben egy mennyiség aránylik\* a másikhoz, és meg kell találni azt az egységet, amelyet szorozni kell, hogy megkapjuk a keresett értéket.

Például egy nyomtatógép 5 percenként 200 oldalt nyomtat. Hány oldalt nyomtat ki 3 óra alatt?

- Számoljuk ki, hány oldalt nyomtat ki egy perc alatt:

5 perc alatt 200 oldal

1 perc alatt  $\frac{200}{5}$ , vagyis

1 perc alatt 40 oldalt nyomtat.

- Számoljuk ki, hány perc van egy órában:

1 óra = 60 perc

$\therefore$  3 óra = 180 perc

180 perc alatt  $180 \cdot 40$  azaz 7200 oldalt nyomtat a gép.

### Hányados módszer

Olyan megoldási eljárás, mely az egyenes arányosságra\* épül. Ennél a módszernél az arányokat\* tört\* formában írjuk fel, az ismeretlen (x) az egyik számlálóba kerül, és úgy számolhatjuk ki, ha a törtet beszorozzuk ugyanazzal a számmal.

Például egy nyomtatógép 5 percenként 200 oldalt nyomtat. Hány oldalt nyomtat ki 3 óra alatt?

A három óra alatt kinyomtatott oldalak száma egyenesen arányos az 5 perc alatt kinyomtatott oldalak számával. Legyen x az a szám, ahány oldalt 180 perc (3 óra) alatt nyomtat a gép. (levezetés)

$$\begin{aligned} \frac{x}{180} &= \frac{200}{5} \\ 180 \cdot \frac{x}{180} &= 180 \cdot \frac{200}{5} \\ x &= 180 \cdot \frac{200}{5} \\ x &= \frac{36000}{5} \\ x &= 7200 \end{aligned}$$

Tehát a gép 7200 oldalt nyomtat ki 3 óra alatt.



# SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

A **százalék** lehetőség, hogy egy törtet\* vagy tizedestörtet úgy értelmezzünk, mint a **száz egy bizonyos részét**: például 10% azt jelenti, hogy  $\frac{10}{100}$  vagy 10 század.



Ezt a jelet használjuk a százalék jelölésére.

%

Ezt a gombot használd a számológépen, ha egy szám adott százalékát keresed.

## Törtek vagy tizedesek átváltása százaléokra

Szorozzuk meg a törtet vagy tizedestörtet 100-zal!

$$\text{Pl.: } \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4} \cdot 100\right)\% = \frac{300}{4}\% = 75\%$$

$$0,28 = (0,28 \cdot 100)\% = 28\%$$

Mindkét fenti példában a törtek értéke 1-nél kisebb volt, így a nekik megfelelő százalékérték is kisebb, mint 100%. Az egynél nagyobb törtekhez mindig olyan százalékérték tartozik, ami nagyobb, mint 100%.

$$\begin{aligned} \text{Pl.: } 2\frac{1}{5} &= \left(\frac{11}{5} \cdot 100\right)\% \\ &= \frac{1100}{5} \\ &= \frac{220}{1} \\ &= 220\% \end{aligned}$$

$$\text{és } 1,16 = (1,16 \cdot 100)\% = 116\%$$

## Átváltás százalékából törtformába

Osszuk el a százalékot 100-zal, aztán egyszerűsítsük a törtet\* a lehető legnagyobb mértékben\*!

$$\text{Pl.: } 60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

## Átváltás százalékából tizedestört alakba

Osszuk el a százalékértéket 100-zal!

$$\begin{aligned} \text{Pl.: } 60\% &= 0,6 \\ 5,2\% &= 0,052 \end{aligned}$$

## Ismert értékből százalékot számolni

Tekintsük a százalékot törtként ( $\frac{x}{100}$ ), és szorozzuk meg az adott mennyiséggel!

Egy másik lehetőség, ha a százalékot tizedestört formában írjuk, és úgy szorozzuk meg.

Például egy 9000 fős város lakosságának 5%-a:

$$\frac{5}{100} \cdot 9000 = 450$$

$$\text{vagy } 0,05 \cdot 9000 = 450$$

## Egy mennyiség meghatározása egy másik százalékaként

Osszuk el az első számot a másodikkal, és az eredményt szorozzuk meg 100-zal!

$$\text{Százalék} = \frac{\text{A mennyiség}}{\text{B mennyiség}} \cdot 100\%$$

Például egy nap a napi 60 buszjáratból 51 érkezett pontosan. Hány százaléka volt buszoknak pontos?

$$\frac{\text{Pontos buszok}}{\text{összes busz}} \cdot 100\%$$

$$\frac{51}{60} \cdot 100\% = 85\%$$

Vagyis a buszok 85%-a volt pontos.

## Az eredeti mennyiség kiszámítása

Osszuk el az adott mennyiséget a százalékkal, (így megkapjuk az egy százalékát), aztán szorozzunk 100-zal, hogy a teljes mennyiséget kapjuk! Ezt megtehetjük úgy is, hogy az adott számot a százalék tizedestört alakjával osztjuk el. Ezt a módszert néha fordított **százalékszámításnak** is nevezzük.

Például, ha egy osztály 75%-a, vagyis 24 diák kitöltött egy tesztet, hány fős az osztály?

I. megoldás:

Osszuk el a 24-et 75-tel, hogy megkapjuk, hány tanuló lenne az osztály 1%-a, majd szorozzuk meg 100-zal, hogy az osztály létszámát kapjuk:

$$\frac{24}{75} \cdot 100 = 32$$

II. megoldás:

Osszuk el a tesztet írt tanulók számát a százaléknak megfelelő tizedestörttel:

$$24 : 0,75 = 32$$

Tehát az osztály létszáma 32 fő.





## Változások százalékban kifejezve

Azt a számot, amivel egy adott érték megváltozik, az eredeti szám valahány százalékaként\* is ki lehet fejezni.

$$\text{Százalék-változás} = \frac{\text{új érték} - \text{eredetérték}}{\text{eredeti érték}} \cdot 100$$

### Százalékos növekedés

Amikor a százalékváltozás pozitív. A százalékos növekedés kiszámítható:

$$\text{Százalékos növekedés} = \frac{\text{értéknövekedés}}{\text{eredeti érték}} \cdot 100$$

Például, ha egy 750 fős iskola újabb 75 hellyel növelheti a tanulói létszámot.

Fejezzük ki ezt a változást százalékos növekedéssel:

$$\begin{aligned} &= \frac{75}{750} \cdot 100 \\ &= \frac{1}{10} \cdot 100 \\ &= \frac{100}{10} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Az iskolai férőhelyek számának növekedését megadhatjuk úgy, mint egy 10%-os emelkedést.

### Százalékos csökkenés

Negatív százalékos változás. A százalékos csökkenés kiszámítható:

$$\text{Százalékos csökkenés} = \frac{\text{érték csökkenés}}{\text{eredeti érték}} \cdot 100$$

Például, ha egy gyár évente, munkásonként 60 autót gyárt, és ez lecsökken 57 autóra fejenként, mennyi a százalékos csökkenés?

Az autók számának csökkenése =  $60 - 57 = 3$

$$\begin{aligned} \text{Százalékos csökkenés} &= \frac{3}{60} \cdot 100 \\ &= \frac{1}{20} \cdot 100 \\ &= \frac{100}{20} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Vagyis a gyár termelése 5%-kal csökkent.

## Kamatok

Amikor betesszük a pénzünket egy bankba, hogy befektessék, használják, pl. kölcsön adják valaki másnak, a bank egy bizonyos összeget fizet nekünk cserébe, hogy használhatják a pénzünket, ezt nevezzük **kamatnak**.

Ugyanígy, ha kölcsönt veszünk fel egy banktól, egy bizonyos kamatösszeget is vissza kell fizetni a kölcsönzött összeg felül. Az eredetileg kölcsönadott vagy kölcsönvett összeget alaptőkének nevezzük.

A **kamatláb** az az összeg, amennyit a betett vagy kölcsönvett összeg egy év alatt kamatozik.

Ezt **évi százalékos\*** formában szokták megadni, például a 4%-os kamat azt jelenti, hogy minden 100 Ft után év végén 4 Ft-tal növekszik az összeg.

Kétféle kamat van: egyszerű és kamatos kamat. Mindkettőt másképp számolják.

### Egyszerű kamat

Az a kamat, amit kizárólag az **alaptőke** után adunk vagy kapunk, függetlenül a korábbi kamatozástól, tehát a kamat nem változik.

### Kamatos kamat

Az a kamat, ami figyelembe veszi az eredeti összeg kamatozását is. Ezáltal az összeg kamata évről évre növekszik.

### Szorzó

Az a szám, amivel az **alaptőkét** megszorozva megkapjuk azt az összeget, amennyit adunk vagy kapunk a periódus (általában egy év) végén.

A szorzó =  $1 + \text{a kamatláb tizedestörtben* megadva}$ .

Például évi 6%-os kamat esetén a szorzó 1,06.



## Egyszerű kamatszámítás

$$\text{Egyszerű kamat} = \frac{A \cdot p \cdot n}{100}$$

Ahol  $A$  az alaptőke,  $p$  a kamatláb (százalékban) és  $n$  az eltelt évek száma.

A végösszeg megállapításához a következő képletet használjuk:

$$\text{Végösszeg} = A + \frac{A \cdot p \cdot n}{100}$$

Például, ha valaki 500 forintot tesz be egy bankba 4%-os egyszerű kamatra, akkor az összeg évente 20 forinttal fog növekedni, mivel:

$$\frac{500 \cdot 4 \cdot 1}{100} = 20$$

A teljes összeg az első év végén 520 forint (mivel a kamat hozzáadódott az alaptőkéhez).

## Kamatos kamat számítása

(Hosszú eljárás)

Keressük meg a szorzót, amelynek segítségével megkapjuk, mennyi lesz az összeg az év végén, aztán tekintjük ezt az értéket a következő év alaptőkéjének.

Például, ha valaki 500 forintot tesz be évi 4%-os kamatra, akkor az első év végén már 520 forintja van ( $500 \cdot 1,04$ ), a második évben már ez az 520 forint fog 4%-kal kamatozni, és így tovább.

$$\begin{aligned} \text{Első év végösszege} \\ = 500 \cdot 1,04 = 520 \text{ Ft} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Második év végösszege} \\ = 520 \cdot 1,04 = 540,80 \text{ Ft} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Harmadik év végösszege} \\ = 540,8 \cdot 1,04 = 562,43 \text{ Ft} \end{aligned}$$

Ennek a kamatos kamat számítási módszernek az alkalmazása nagy összegre, sok évre elég időrabló, de van más lehetőség is.

## Kamatos kamat számítása

(Rövid módszer)

Tekintsünk egy embert, aki 500 forintot tesz be évi 5%-os kamatra.

Az első év végén az új összeg:

$$500 \text{ Ft} \cdot 1,05$$

(alaptőke  $\times$  szorzó)

A második év végére az összeg:

$$\begin{aligned} (500 \text{ Ft} \cdot 1,05) \cdot 1,05 \\ = 500 \text{ Ft} \cdot 1,05^2 \end{aligned}$$

A harmadik év végére:

$$(500 \text{ Ft} \cdot 1,05) \cdot 1,05 \cdot 1,05 = 500 \cdot 1,05^3$$

Ezt a sorozatot követve a végösszeg:

$$\text{a 6. év végén: } 500 \cdot 1,05^6$$

$$\text{a 10. év végén: } 500 \cdot 1,05^{10}$$

$$\text{az } n. \text{ év végén: } 500 \cdot 1,05^n$$

A hatványt amivel a szorzó növekszik szorzótényezőnek nevezzük, és annak értéke megegyezik a kamatidő éveinek számával. Tehát, a befektetett összeg végösszegének kamatos kamatja:

$$\text{Végösszeg} = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$\text{Kamatos kamat} = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - A$$

Ahol  $A$  az alaptőke,  $p$  a kamat (százalékban) és  $n$  az eltelt évek száma.

Például, ha 20 forintot teszünk be évi 4%-os kamattal 5 évre, az 24,33 forintot fog érni, mivel:

$$\begin{aligned} 20 \times (1,04)^5 \\ = 20 \times 1,2167 \end{aligned}$$

$$= 24,334$$

$$= 24,33 \text{ (2 d.p.)}$$





# GEOMETRIA

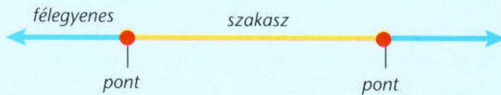
A **geometria** az a tudomány, amely a különböző formák és környezetük tulajdonságait vizsgálja a legegyszerűbb háromszögtől a legbonyolultabb testekig.

## Pont

Egy hely, amit megadhatunk a **koordinátaival**. A pontnak nincs hosszúsága, szélessége, vastagsága. Általában egy kis pöttyel vagy kereszttel szoktuk ábrázolni.

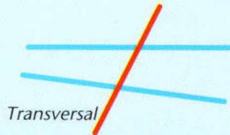
## Szakasz

Az egyenes két **pont** közötti része. A szakasznak van hosszúsága. Szigorúan véve az **egyenes** még a végtelenségig folytatódik mindkét irányban. Az egyenes és a **szakasz** **egydimenziós**: van hosszúságuk, de nincs szélességük és vastagságuk.



## Metsző egyenes

Olyan egyenes, amely két vagy több egyenest is elmetesz.



## Vízszintes

Egy kifejezés, amely arra utal, hogy az **egyenes** vagy **sík** követi a horizontot, és  $90^\circ$ -ot zár be a **függőlegessel**.

## Függőleges

Annak kifejezése, hogy az **egyenes** vagy **sík**  $90^\circ$ -os szöget zár be a horizonttal.

## Merőleges

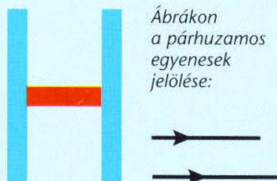
Annak kifejezése, hogy két **egyenes**, vagy **sík**  $90^\circ$ -ot zár be egymással.

## Párhuzamos

Annak kifejezése, hogy két **egyenes** vagy görbe sohasem találkozik, akármilyen hosszan is húzzuk, és a pontjaik közötti távolság állandó.

A H betűben pirossal jelzett szakasz **vízszintes**.

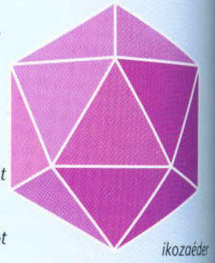
A két vonalak **függőlegesek** és **párhuzamosak**, mivel távolságuk állandó és sosem találkoznak.



Ábrákon a párhuzamos egyenesek jelölése:

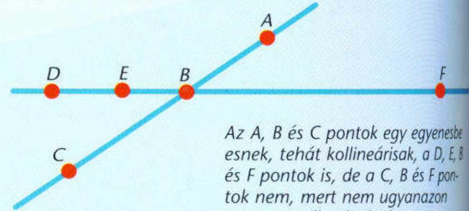


A geometria olyan formákat tanulmányoz, mint ez a háromszög vagy ikozaéder, és a közöttük lévő kapcsolatot vizsgálja.



## Kollineáris

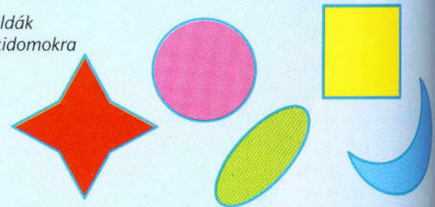
Olyan **pontok** gyűjtőneve, melyek egy egyenesbe esnek.



## Sík vagy síkidom

**Kétdimenziós** alakzatok, hosszúsággal és szélességgel.

Példák síkidomokra



## Koplenáris

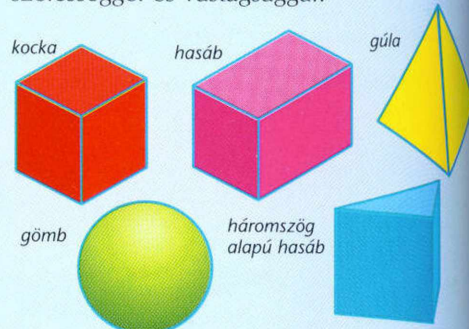
Annak kifejezése, hogy **pontok** vagy más alakzatok ugyanazon síkban vannak.

Az ábrán látható test A, D és C pontja egy síkban van, az A, B és E pontok is, azonban A, B, C és D pontok nincsenek mind egy síkban. D



## Testek

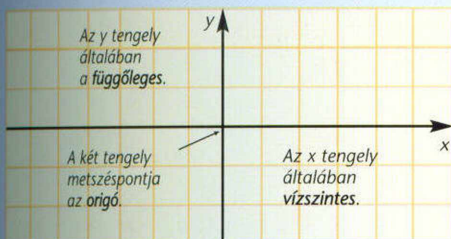
**Háromdimenziós** tárgyak, hosszúsággal, szélességgel és vastagsággal.



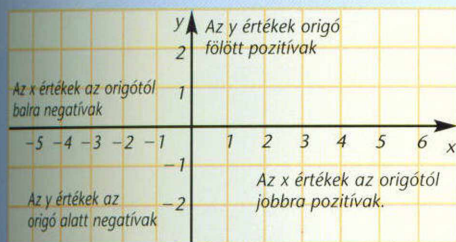


## Descartes-féle koordináta-rendszer

Egy olyan rendszer, amely pontok helyzetét adja meg a síkban vagy térben bizonyos egyenesektől (tengelyektől) való távolságuk alapján. Egy síkban a pontok megadásához két egyenes kell, az **x tengely** és az **y tengely**, amelyek merőlegesek egymásra. Ezek alkotják a derékszögű koordináta-rendszert.

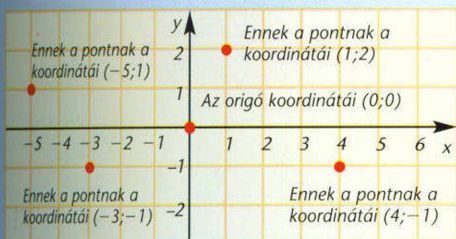


Az x tengely origótól jobbra eső része a pozitív, a balra eső része pedig a negatív. Az y tengelyen az origó fölötti rész a pozitív, az origó alatti pedig a negatív.



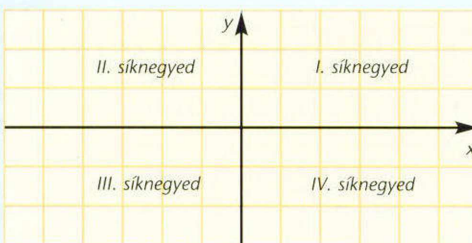
## Descartes-féle koordináták

A pont helyzetét a **koordináták**  $(x, y)$  segítségével adhatjuk meg. Az első, az **x koordináta** mutatja a pont **y tengelytől** való távolságát, a második, az **y koordináta** mutatja a pont **x tengelytől** való távolságát. Mindig az x koordinátát írjuk előre.



## Síknegyedek

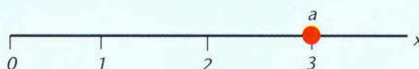
Az **x és y tengelyek** négy részre osztják a síkot, ezek a részek a síknegyedek.



## Dimenziók

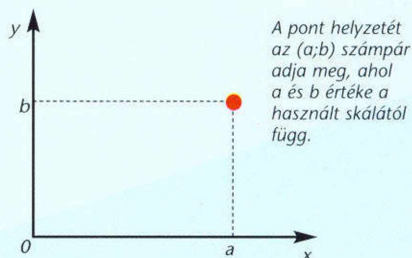
Azon **koordináták** száma, melyek egy **pont** térbeli megadásához szükségesek.

Egy pont helyzetét egy **egyenesen** vagy egy **szakaszon**, egyetlen koordinátával megadhatjuk, ezért mondjuk, hogy az egyenes **egydimenziós**.

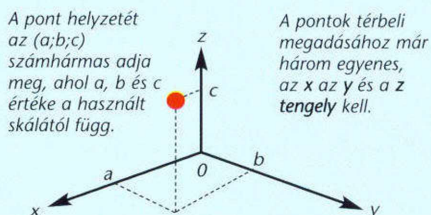


A 3 helyzete

Két koordináta szükséges egy pont **síkbeli** megadásához, így a sík **kétdimenziós**.



Három koordináta szükséges egy pont **térbeli** meghatározásához, ami azt jelenti, hogy a tér, vagy a körülöttünk lévő testek **háromdimenziósak**.





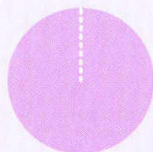
# SZÖGEK

Egy **szög** úgy jön létre, hogy két egyenes egy pontban\* találkozik. A szög nagyságát az adja, hogy az egyik egyenest mennyivel kell elforgatni a pont körül, hogy a másik egyenessel fedésbe kerüljön. Ennek az elforgatásnak a mértékét **fokban** ( $^{\circ}$ ) adjuk meg. Néhány nevezetes szöget mutatunk be, méreteik alapján.



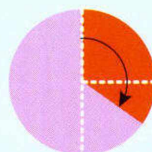
A két egyenest, mely közre zárja szöget, a szög **szárainak** nevezzük.

## Nullaszög



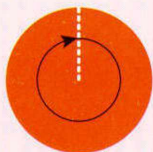
Nincs elforgatás ( $0^{\circ}$ ).

## Tompaszög



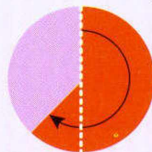
Minden olyan szög, mely nagyobb a derékszögnél ( $90^{\circ}$ ), de kisebb, mint az egyenesszög ( $180^{\circ}$ ).

## Teljes szög



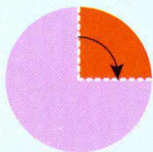
Egy teljes körön forgatunk, így ez  $360^{\circ}$ .

## Homorúsög



Minden olyan szög, mely nagyobb, mint az egyenesszög.

## Derékszög

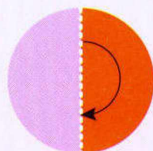


A teljes szög negyedrésze,  $90^{\circ}$ . Azokat az egyeneseket, melyek  $90^{\circ}$ -os szöget zárnak be, **merőleges** egyeneseknek nevezzük.

Ezek az egyenesek merőlegesek.

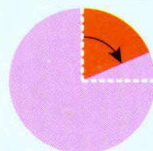
A derékszöveget jelölő szimbólum: A szöveget jelző körívben egy pont

## Egyenesszög

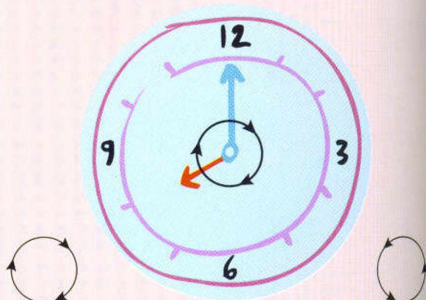


A teljes szög fele,  $180^{\circ}$ .

## Hegyeszög



Minden szög, amely kisebb, mint  $90^{\circ}$ .



Óramutatóval azonos irány

Óramutatóval ellentétes irány

Az órák percmutatója óránként megtesz egy teljes kört, vagyis elfordulása:  $360^{\circ}$ . Azt az irányt, amerre a percmutató elfordul az **óramutató járása** szerinti, a vele ellentétet **óramutató járásával ellentétes** iránynak hívjuk.

## Pozitív szög

Az óramutató járásával ellentétes irányban felmért szög.

Ez a szög az óramutatóval ellentétes irányú, így pozitív ( $+100^{\circ}$ )

## Negatív szög

Az óramutató járásával azonos irányban felmért szög.

Ez a szög, óramutatóval azonos irányú, tehát negatív ( $-100^{\circ}$ )



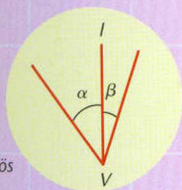
## Szögpárok

Ahogy kezdetben nagyságuk szerint neveztük el a szögeket, úgy csoportosíthatjuk őket tulajdonságaik, száraihoz való kapcsolatuk vagy más szögekhez való kapcsolatuk alapján. Most több, páronként előforduló szöveget nézünk.

### Szomszédos szögek

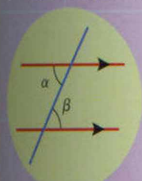
Közös a csúcspont\*, és egyik száruk megegyezik.

Az  $\alpha$  és  $\beta$  szögek szomszédosak,  $V$  a közös csúcspont,  $e$  a közös szár.

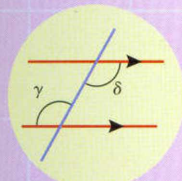


### Váltószögek

Két párhuzamos egyenest elmeteszünk\* egy harmadik egyenessel, a párhuzamosoknál\* keletkező szemköztli szögek a váltószögek. A váltószögek mindig egyenlők.



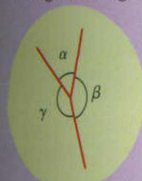
$$\alpha = \beta$$



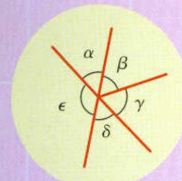
$$\gamma = \delta$$

### Egy csúcspontnál\* lévő szögek

Azok a szögek, amelyeket egy pontba futó egyenesek határoznak meg. Az ilyen szögek összege mindig  $360^\circ$ .



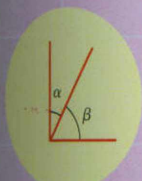
$$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$$



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

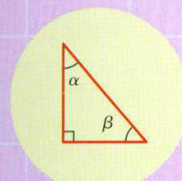
### Pótszögek

Azok a szögek, melyek összege  $90^\circ$ . Ezeket a szögeket egymás **komplementer** szögeinek is nevezzük.



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Amikor a derékszöveget két részre osztjuk, a keletkező szögek komplementer szögek.



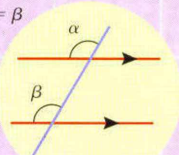
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Egy derékszögű háromszög\* hegyesszögei is pótszögek.

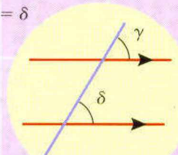
### Egyállású szögek

Olyan szögek, amelyeknek azonos a helyzete. Amikor két párhuzamos\* egyenest elmeteszünk egy harmadik egyenessel, a metsző egyenes ugyanazon oldalán keletkező szögek (4 szögpár) az egyállású szögek. Az egyállású szögek mindig egyenlők.

$$\alpha = \beta$$

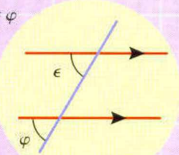


$$\gamma = \delta$$

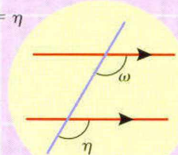


A négy egyállású szögpárt két párhuzamos\* és egy metsző\* egyenes hozza létre.

$$\epsilon = \varphi$$



$$\omega = \eta$$

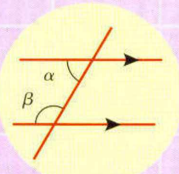
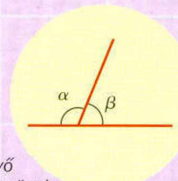


### Kiegészítő szögek

Olyan szögek, melyek összege  $180^\circ$ . Közülük bármelyiket mondhatjuk a másik **kiegészítőjének**.

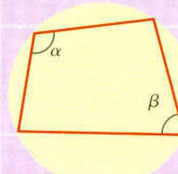
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Egy egyenes szög mentén fekvő szomszédos szögek kiegészítő szögek.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Két párhuzamos egyenes\* közt, a metsző egyenes\* ugyanazon oldalán fekvő két szög is kiegészítő szög.



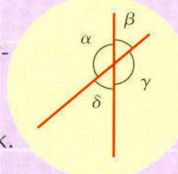
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

A húrnégyszög\* szemköztli szögei is kiegészítő szögek.

### Csúcsszögek

A két egyenes metszéspontjánál egymással szemben keletkező szögek. Ezek a szögpárok mindig egyenlők.

$$\alpha = \gamma \text{ és } \beta = \delta$$





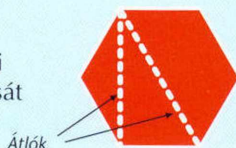
# SÍKIDOMOK

Olyan **alakzatok**, amelyek három vagy több pontját három vagy több egyenes köti össze. A pontokat a sokszög **csúcsainak**, az egyeneseket az **oldalainak** nevezzük. A legtöbb sokszög az oldalszáma (szögszáma\*) alapján kapta a nevét.

A sokszög neve	Oldalainak és szögeinek száma	Alakja
Háromszög	3	
Négyszög	4	
Ötszög	5	
Hatszög	6	
Hétszög	7	
Nyolcszög	8	
Kilencszög	9	
Tízsög	10	
Tizenegyszög	11	
Tizenkészsög	12	
Tizenötszög	15	
Húszszög	20	

## Átló

A sokszög két szemkötti (nem szomszédos) csúcsát összekötő szakasz.

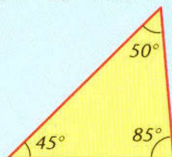


## $n$ – szög

Olyan sokszög, melynek  $n$  db szöge és  $n$  db oldala van, ahol  $n$  egy tetszőleges egész számot helyettesít.

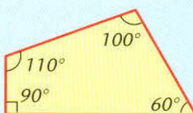
## Belső szög

A sokszög bármely belső szöge, ahol két oldal egy csúcsban találkozik. A belső szögek összege minden ugyanannyi oldallal, illetve szöggel rendelkező sokszög esetén egyenlő. A belső szögek összege  $n$  – szög esetén:  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .



Pl.: Egy háromszögben  $n$  értéke 3, így:  
 $180^\circ(3 - 2)$   
 $= 180^\circ \cdot 1$   
 $= 180^\circ$

$$50^\circ + 85^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$



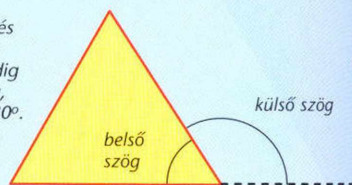
Egy négyszögben  $n = 4$ , így:  
 $180^\circ(4 - 2)$   
 $= 180^\circ \cdot 2$   
 $= 360^\circ$

$$100^\circ + 60^\circ + 90^\circ + 110^\circ = 360^\circ$$

## Külső szögek

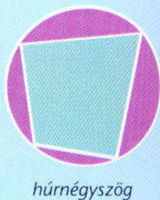
Olyan szög, melyet a sokszög egyik oldala és szomszédos oldalának meghosszabbítása zár be.

Egy belső szög és a hozzá tartozó külső szög mindig kiegészítő\* szög, így összegük  $180^\circ$ .



## Húrsokszög

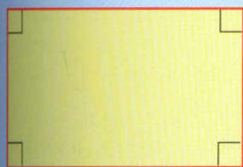
Olyan sokszög, mely köré úgy tudunk kört írni, hogy a sokszög minden csúcsa a körvonalon\* legyen.





**Egyenlő szögű sokszög**

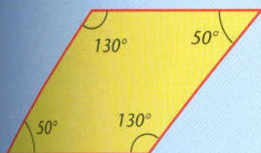
Olyan sokszög, melynek minden **belső szöge** egyenlő. Az egyenlő szögű sokszögeknek nem kell feltétlen **egyenlő oldalúnak** is lenni.



A téglalap\* egyenlő szögű négyszög, hisz minden szöge derékszög ( $90^\circ$ ). Azonban nem egyenlő oldalú, mivel hosszúsága és szélessége különböző.

**Egyenlő oldalú sokszög**

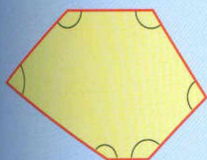
Olyan sokszög, melynek minden oldala egyenlő. Az egyenlő oldalú sokszögeknek nem kell **egyenlő szögűnek** is lenni.



Ennek a rombusznak\* minden oldala egyenlő, a belső szögei azonban különböznek, így nem egyenlő szögű.

**Konvex sokszög**

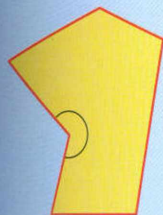
Olyan sokszög, melynek minden **belső szöge** kisebb  $180^\circ$ -nál.



A konvex sokszögben minden szög vagy hegyesszög\*, vagy tompaszög\*, vagy derékszög\* (kisebb, mint  $180^\circ$ ).

**Konkáv sokszög**

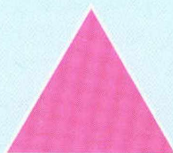
Olyan sokszög, melynek egy vagy több **belső szöge** is nagyobb  $180^\circ$ -nál.



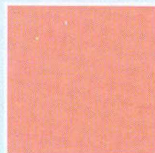
A sokszög legalább egy szöge homorú szög\* (nagyobb, mint  $180^\circ$ ).

**Szabályos sokszög**

Olyan sokszög, melynek minden oldala és minden **belső szöge** egyenlő, vagyis egyszerre **egyenlő szögűek** és **egyenlő oldalúak**. Néhány példa szabályos sokszögekre:



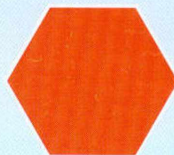
Egyenlő oldalú háromszög



Négyzet



Szabályos ötszög



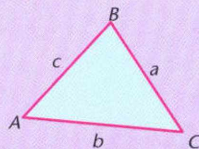
Szabályos hatszög



Az Egyesült Államok Védelmi Minisztériuma, a Pentagon, mely nevét az ötszögletű épülete alapján kapta.

**A sokszögek jelölései**

A sokszög csúcsait általában nagybetűvel (pl. A, B, C ...) oldalait kisbetűvel (pl. a, b, c ...) jelöljük.



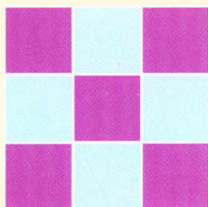
Egy sokszög oldalát ugyanolyan betűvel jelöljük, mint a szemközti csúcsot, csak kisbetűvel.



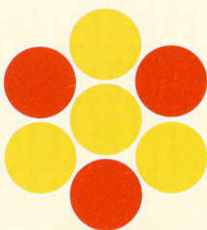


## Mozaikok

A **mozaik** egy vagy több alakzat kombinálása, ismétlése, mely során különböző mintájú felületek jönnek létre anélkül, hogy fednék egymást, vagy rés lenne közöttük. Az ily módon megfelelően összeillesztett alakzatokat nevezzük **mozaiknak**.



Ezek a négyzetek mozaikot alkotnak.



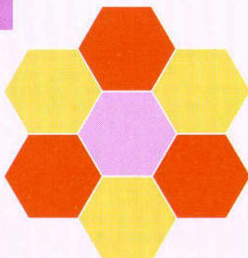
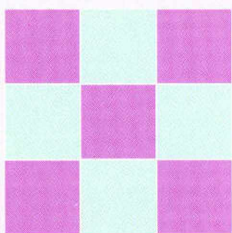
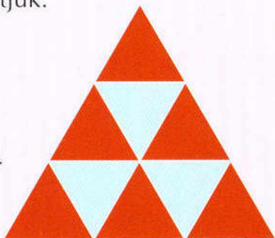
Ezek a körök nem mozaikok.

Sokféle alakzattól lehet mozaikot készíteni, de két lényegesen különböző típus van: az egyik, amelyik csak szabályos sokszögekből\* áll, és a másik, ami nem – ezeket szabályos, illetve félig szabályos mozaikoknak nevezzük.

### Szabályos mozaikok

A mozaikot csak egyfajta szabályos sokszögből készítjük.

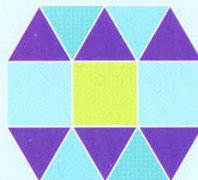
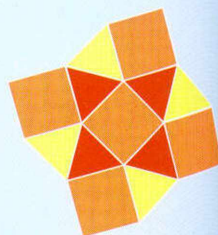
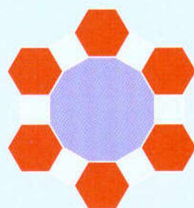
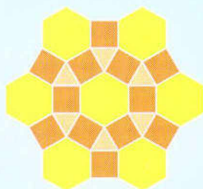
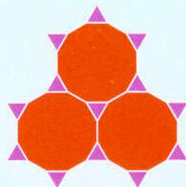
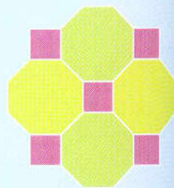
Háromféle szabályos sokszög van, ami szabályos mozaikot alkothat: a szabályos háromszög, a négyzet és a szabályos hatszög.



### Félig szabályos mozaik

Nem csak egyfajta szabályos sokszög alkotja. A mintázat úgy jön létre, hogy a sokszögek azonos csúcsokban találkoznak.

Nyolcféle, félig szabályos mozaik létezik, ezekhez egyenlő oldalú háromszögeket, négyzeteket, hat-, nyolc- és tízsögeket használtunk fel.



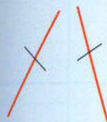


## Háromszögek

A **háromszög** olyan sokszög, amelynek három szöge és ebből következően három oldala van. Ha ismertek a háromszög bizonyos szögei és oldalai, a többit kiszámíthatjuk a *Pitagorasz-tétellel* (lásd 38. oldal) vagy *szögfüggvények* segítségével (lásd 60–64. oldal).

A háromszögeket osztályozhatjuk oldalaik hosszúsága szerint.

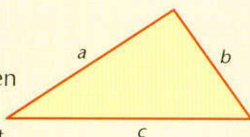
### Egyenlő oldalak



Ha két vagy több oldalt azonos számú kis keresztvonallal jelölünk meg, ez azt jelenti, hogy az oldalak egyenlők.

### Általános háromszög

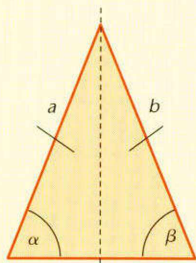
Háromszög, melynek minden oldala és minden szöge különböző. Az ilyen háromszög is lehet derékszögű (de akkor már nevezzük **derékszögű háromszögnek** mondjuk).



Egy általános háromszögben az  $a$ ,  $b$  és  $c$  oldalak hossza különböző.

### Egyenlő szárú háromszög

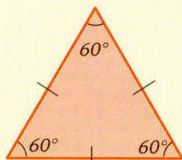
Olyan háromszög, melynek van két egyenlő oldala. Ezekkel az oldalakkal szemközt szögek is egyenlők. Az egyenlő szárú háromszögnek van szimmetriatengelye, mely két egybevágó **derékszögű háromszögre** bontja.



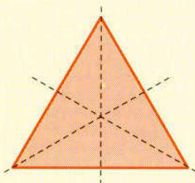
Egyenlő szárú háromszög: szögei ( $\alpha$  és  $\beta$ ) egyenlők, oldalai  $a$  és  $b$  szintén egyenlők.

### Egyenlő oldalú háromszög

Olyan háromszög, melynek három egyenlő oldala van. Minden szöge  $60^\circ$ -os.



Az egyenlő oldalú háromszögnek három szimmetriatengelye van: ezek mindegyike két egybevágó **derékszögű háromszögre** bontja a háromszöget.



A háromszögeket szögeik szerint is osztályozhatjuk.

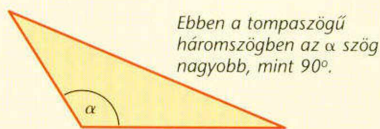
### Hegyesszögű háromszög

Olyan háromszög, melynek minden szöge hegyesszög\*, vagyis kisebb, mint  $90^\circ$ .



### Tompaszögű háromszög

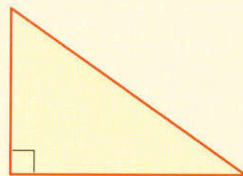
Olyan háromszög, melynek egyik belső szöge tompaszög, vagyis nagyobb, mint  $90^\circ$ .



### Derékszögű háromszög

Olyan háromszög, melynek egyik belső szöge\* derékszög, vagyis  $90^\circ$ . A másik két szög pótiszög, ami azt jelenti, hogy összegük  $90^\circ$ .

A derékszögű háromszögeknek van egy különleges tulajdonságuk (nézd meg a Pitagorasz-tételt a 38. oldalon)



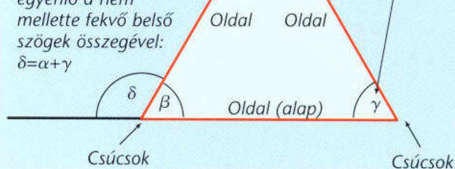
### A háromszög szögei

A belső szögek\* összege  $180^\circ$ :

A háromszögnek ezt a csúcsát az **alappal szemközt szögnek** is nevezzük.

A szöget bővebben úgy is mondhatjuk, mint a két oldal által **közbezárt szög**.

Minden külső szög\* egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével:  
 $\delta = \alpha + \gamma$





## Egyéb háromszögek

### Egybevágó háromszögek

Olyan háromszögek, melyeknek pontosan ugyanolyan az alakja, és oldalai egyenlők. Két háromszög egybevágó\*, ha bármelyik, lentebb felsorolt esetnek megfelelnek.

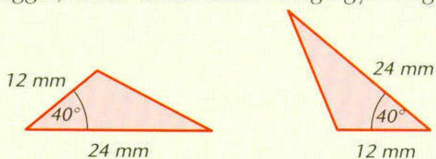
### Mindhárom oldal (OOO)

Ha egy háromszög mindhárom oldala egyenlő egy másik háromszög oldalával, akkor a két háromszög egybevágó.



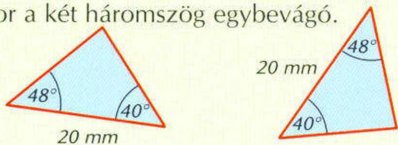
### Két oldal és a közbezárt szög (OSO)

Ha egy háromszög két oldala és az ezek által közbezárt szöge\* megegyezik egy másik háromszög két oldalával és az általuk bezárt szöggel, akkor a két háromszög egybevágó.



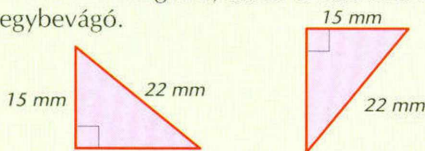
### Egy oldal és a rajta fekvő két szög (OSS)

Ha egy háromszög egy oldala és a rajta fekvő két szöge megegyezik egy másik háromszög egy oldalával és a rajta fekvő két szögével, akkor a két háromszög egybevágó.



### Két oldal és a nagyobbikkal szemkötti szög

Ha egy háromszög két oldala és a hosszabbik oldallal szemkötti szöge megegyezik egy másik háromszög két oldalával és a hosszabbikkal szemkötti szögével, akkor a két háromszög egybevágó.

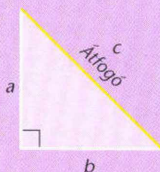


### Hasonló\* háromszögek

Olyan háromszögek, melyek szögei egyenlők, de az oldalak nem feltétlenül ugyanolyan nagyságúak. A megfelelő szögek egyenlők, a megfelelő oldalak pedig arányosak egymással.

### Pitagorasz-tétel

A tétel egy Pythagoras nevű görög filozófus és matematikusnak tulajdonítható, aki a Kr. e. hatodik században élt. A tétel azt mondja ki, hogy egy derékszögű háromszög\* átfogójára emelt négyzet\* területe egyenlő a másik két oldalra (befogók) emelt négyzetek területének összegével. Az **átfogó** a derékszögű háromszög leghosszabb oldala. Ez mindig a derékszögű csúccsal szemközt van.



A Pitagorasz-tételt felírhatjuk:  
 $a^2 + b^2 = c^2$   
 formában.

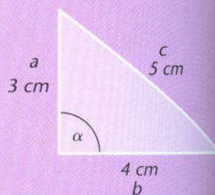
Ha egy háromszög egyik oldalának négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével, akkor a háromszög derékszögű. (Ez a Pitagorasz-tétel megfordítása.)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

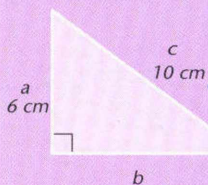
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$9 + 16 = 25$$

Ebből következik, hogy az ábrán az átfogóval szemkötti  $\alpha$  szög derékszögű kell, hogy legyen.



A tételt arra használhatjuk, hogy egy derékszögű háromszög harmadik oldalát kiszámítsuk a másik két oldal ismeretében.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$36 + b^2 = 100$$

$$b^2 = 100 - 36$$

$$b^2 = 64$$

$$b = 8$$

Igy a b oldal hossza 8 cm.

### Pitagorasz számhármaskok

Olyan pozitív egész\* számhármaskok (a, b és c), melyek egy háromszög oldalai is lehetnek, és teljesül rájuk a Pitagorasz-tétel ( $a^2 + b^2 = c^2$ ).

A pitagorasz számhármaskok közül a legismertebbek:

$$3, 4, 5: \quad 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$5, 12, 13: \quad 5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$7, 24, 25: \quad 7^2 + 24^2 = 25^2$$

$$8, 15, 17: \quad 8^2 + 15^2 = 17^2$$

\*Konkáv 35 (konkáv sokszög); egybevágó alakzatok 44; átló 34; közbezárt szög 37 (a háromszög szögei); egész szám 6; belső szög 34; szimmetria tengely 42; párhuzamos 30; derékszögű háromszög 37; forgás szimmetria 42; Hasonló alakzatok 44; négyzetre emelés (négyzetszámok) 8; összeg (összeadás) 14; szimmetria 42; mozaik 36.

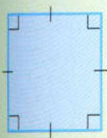


## Négyszögek

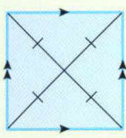
A négyszoldalú sokszögeket röviden **négyszögeknek** nevezzük. Minden négyszög egy mozaik\*. Ezen az oldalon különleges tulajdonságú négyszögeket gyűjtöttünk össze.

### Négyzet

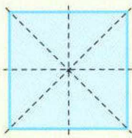
Olyan négyszög, melynek minden oldala egyenlő, és minden szöge derékszög ( $90^\circ$ ). A négyzet szemközti oldalai párhuzamosak\*. Négy szimmetriatengelye\* van, és negyedrendű forgásszimmetrikus\*.



Egy négyzetnek négy egyenlő oldala és négy derékszöge van.



A négyzet szemközti oldalai párhuzamosak, és átlói\* egyenlő hosszúak.

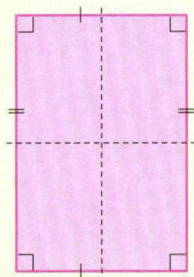


A négyzetnek négy szimmetriatengelye van, és negyedrendű forgásszimmetrikus.

### Téglalap

Olyan négyszög, melynek szemközti oldalai egyenlők és párhuzamosak\*, és minden belső szöge\* derékszög ( $90^\circ$ ).

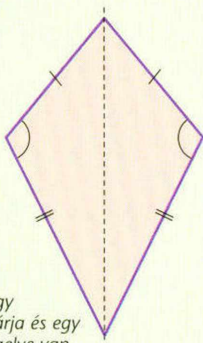
A téglalapnak két szimmetriatengelye\* van, és másodrendű forgásszimmetrikus\*. A téglalap átlói\* egyenlő hosszúak.



A téglalapnak két szimmetriatengelye van, és másodrendű forgásszimmetrikus.

### Deltoid

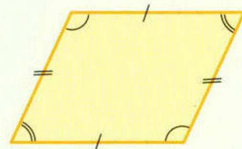
Olyan négyszög, melynek két-két szomszédos oldala egyenlő, és van egy egyenlő szögpárja, amelyek egymással szemben vannak. Csak egy szimmetriatengelye\* van, és nem forgásszimmetrikus\*.



A deltoidnak egy egyenlő szögpárja és egy szimmetriatengelye van.

### Paralelogramma

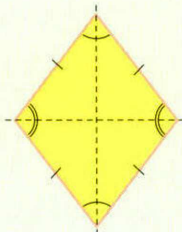
Olyan négyszög, melynek szemközti oldalai párhuzamosak\* és egyenlő hosszúak, szemközti szögei egyenlők. A legtöbb paralelogrammának nincs szimmetriatengelye\*, de másodrendű forgásszimmetrikus\*. Kivételek a **téglalap**, a **négyzet** és a **rombusz**, melyek speciális paralelogrammák.



Ennek a paralelogrammának a szemközti szögei egyenlők, de nincsenek derékszögei.

### Rombusz

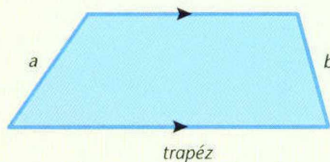
Olyan paralelogramma, melynek minden oldala egyenlő hosszú, és szemközti szögei egyenlők. A rombusznak két szimmetriatengelye\* van, és másodrendű forgásszimmetrikus\*. A **négyzet** speciális rombusz, amelynek négy derékszöge van.



A rombuszt gyakran mondják **deltoidnak** is, ha a csúcsán áll.

### Trapéz

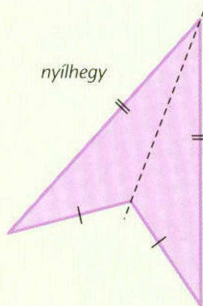
Olyan négyszög, melynek egy párhuzamos oldalpárja van. A legtöbb trapéznek nincs szimmetriatengelye\*, azonban, ha a trapéz szárai ( $a$  és  $b$ ) egyenlő hosszúak, akkor van egy szimmetriatengelye\*. Ezt a fajta trapézt **egyenlő szárú trapéznak** (trapezoidnak) nevezzük.



### Nyílhegy

(magyarul konkáv deltoid)

Olyan konkáv\* négyszög, melynek két pár szomszédos oldala egyenlő. Egy nyílhegynek az egyik belső szöge\* nagyobb mint  $180^\circ$ , és egy szimmetriatengelye\* van. Nem forgásszimmetrikus\*.





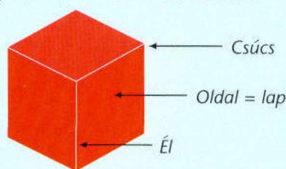
# TESTEK

A **test** háromdimenziós\* vagy térbeli alakzat. Egy test lehet bármilyen alakú és méretű, de sok testnek, mint amilyenek például a **poliéderek**, a gömbök, a kúpok és a hengerek, egyedi tulajdonságaik vannak. A poliéderek tulajdonságait itt tárgyaljuk, de a gömbökről, kúpokról és hengerekről a 67–69. oldalon olvashatsz majd.

## Poliéder

Olyan térbeli alakzat, melynek felszínét sokszögek alkotják. A sokszögeket **lapoknak**, az oldallapok találkozásait **éleknek** nevezzük. Azokat a sarkokat, melyeknél három vagy több oldal találkozik, **csúcso**knak nevezzük.

A kocka poliéder.



A testek annak alapján csoportosíthatók, hogy milyen sokszögek alkotják őket.

### A poliéder neve Az oldalak száma

Tetraéder	4
Ötoldalú	5
Hexaéder	6
Hétoldalú	7
Oktaéder	8
Kilencoldalú	9
Tízoldalú	10
Dodekaéder	12
Ikozaéder	20

## Lapszög

Két oldallap által közbezárt szög\*.

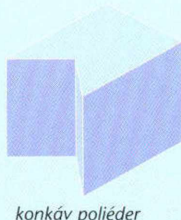


## Konvex poliéder

Olyan **poliéder**, melynek minden **lapszöge** kisebb, mint 180°, például egy **kocka**.

## Konkáv poliéder

Olyan **poliéder**, melynek **legalább egy szöge** nagyobb, mint 180°. Ez azt jelenti, hogy legalább egy **csúcsa** a test középpontja felé mutat.



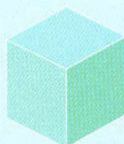
## Szabályos poliéder

Olyan **poliéder**, melynek minden **oldallapja** egybevágó szabályos sokszög\*. A **csúcso**knál lévő szögek egyenlők. Öt ilyen szabályos poliéder van. Ezeket a görög filozófus, Platón nevezte el, és néha **platóni testeknek** is mondják őket.



A szabályos tetraéder négy szabályos háromszögből áll.

A kocka hat négyzetből áll.



A szabályos oktaéder nyolc szabályos háromszögből áll.



A szabályos dodekaéder tizenkét szabályos ötszögből áll.



A szabályos ikozaéder húsz szabályos háromszögből áll.



## Félig szabályos poliéderek

Olyan **poliéder**, melynek **oldallapjai** különböző szabályos sokszögek. Az **ikozadodekaédernek** 32 oldala van, melyek 20 háromszögből\* és 12 ötszögből\* állnak.



Ikozadodekaéder

## Euler tétele

Ez a tétel a **poliéderek** éleinek, csúcseinak és lapjainak a számára vonatkozik:

$$C + O = E + 2$$

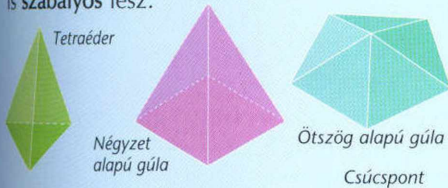
Ahol  $C$  = csúcsok száma,  $E$  = élek száma,  $O$  = oldalak száma. Ez a tétel jól látható pl. a **kocka** esetében, amelynek 8 csúcsa, 12 éle, és 6 oldala van ( $8 + 6 = 12 + 2$ ). Ez a tétel a svájci matematikus, Leonard Euler (1707–83) után kapta a nevét.

\*Szög 32; forgástengely 42; egyenlő oldalú háromszög 37; párhuzamos 30; ötszög 35 (szabályos sokszögek); magasság 56 (háromszög területe); sokszög 34; szabályos sokszög 35; derékszög 32; háromdimenziós 31 (dimenziók); háromszög 37; kétdimenziós 31 (dimenziók)



## Gúla

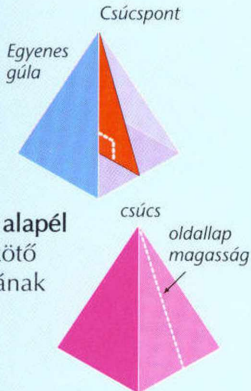
Olyan **poliéder**, melynek alapja egy sokszög, oldalai pedig háromszögek, melyek a **csúcs-pontban** találkoznak. A gúla, más néven **pi-ramis** neve az alapját adó sokszögre utal. Ha az alap szabályos sokszög\*, akkor a **gúla** is **szabályos** lesz.



Az **egyenes gúla** olyan gúla, amelyben a csúcs-pont az alap középpontjában állított merőlegesen van.

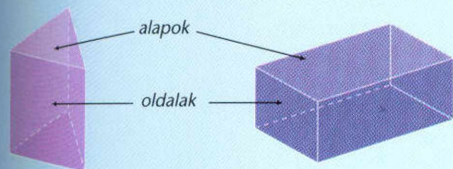
### Az oldallap magassága

A gúla csúcspontját és az **alapél** oldalfelező pontját összekötő egyenes. A gúla oldallapjának magassága megegyezik a lapháromszög magasságvonalával\*.



## Hasáb

Olyan **poliéder**, mely két, egymással párhuzamos és egybevágó\* sokszögből áll (ezek az **alapok**), melyeket paralelogrammakkal kötünk össze (ezek az **oldalak**).



A háromszög alapú hasáb alapja háromszög.

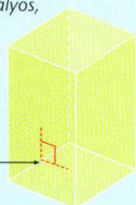
A téglatest olyan hasáb, melynek alapja téglalap.

Egyenes hasáb esetén az oldallapok derékszöget\* zárnak be az alappal.

Ha az alapja szabályos sokszög, akkor a **hasáb** is **szabályos** lesz.

Ez az egyenes hasáb szabályos, mivel az alapja négyzet.

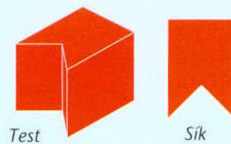
Derékszög



**Ferde hasáb** esetén az oldallapok és az alap által bezárt szög nem derékszög.

## Sík

A test felülnézetből látható kétdimenziós rajza.



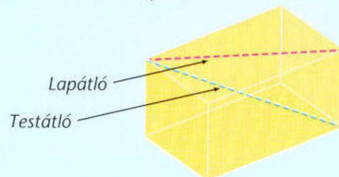
## Előlnézet

A test előlnézetből vagy oldalnézetből látható rajza. A test eleje a szemlélőhöz közelebbi levő oldal.



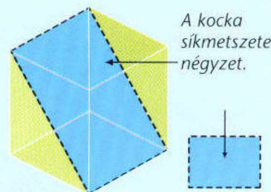
## Átló

A test két olyan **csúcsát** összekötő szakasz, amelyek nem azonos élen fekszenek. A testeknek vannak **lapátlói**, melyek a felszín csúcsait összekötő szakaszok, és **testátlói**, melyek a test belsejében vannak.



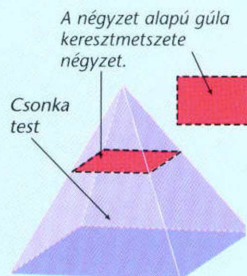
## Síkmetszet

A testátló által alkotott metszet a testben síkmetszetet képez.



## Keresztmetszet

A szimmetriatengelyre merőleges egyenes mentén létrehozott metszet. Ezáltal **csonka test** keletkezik.



## Térháló

Olyan sokszögekből álló alakzat\*, mely a **poliéder oldalait** szemlélteti, és melynek alkotóit behajtvva, poliédert kapunk.





# SZIMMETRIA

Egy alakzat **szimmetrikus**, ha úgy megfelelezhető, hogy a kapott forma saját magával fedésbe hozható. Az a síkidom vagy térbeli alakzat, amely nem szimmetrikus, az **aszimmetrikus**. Két fajtája van a szimmetriának: tükrözés és elforgatás.

## Tükrözéses szimmetria vagy tengelyesen szimmetrikus

Az a szimmetria, mikor egy alakzatot egy vonal vagy síklap mentén két részre osztunk, s ezek a részek egymás tükörképei.



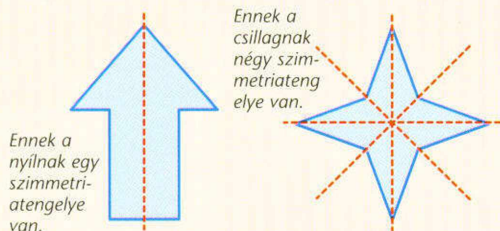
A lepke szimmetrikus, mivel a két része tükörképe egymásnak.



A tál szimmetrikus, mivel mind a kapott részek egymás tükörképei.

## Szimmetriatengely

Az a vonal, amely az alakzatot két részre osztja, s mindkét rész tükörképe egymásnak. Egy síkidomnak több szimmetriatengelye is lehet.

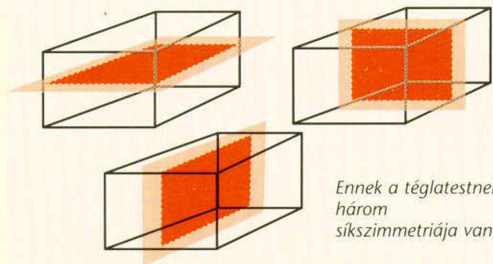


Ennek a nyílnak egy szimmetriatengelye van.

Ennek a csillagnak négy szimmetriatengelye van.

## Síkszimmetria

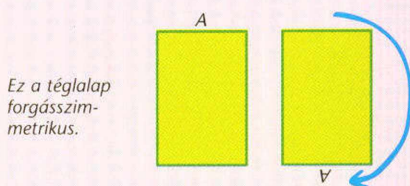
Egy sík két részre oszt egy térbeli alakzatot, s mindkét rész tükörképe egymásnak. Egy térbeli alakzatnak lehet egynél több szimmetriasíkja is.



Ennek a téglatestnek három síkszimmetriája van.

## Elforgatás

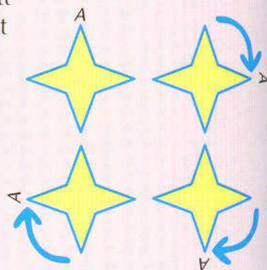
Amikor egy alakzatot egy megadott pont\* körül elforgatunk, és a két forma egymással fedésbe hozható.



## A forgási szimmetria rendje

Az a szám, ahányszor egy teljes körülfordulás alatt elforgatható a test úgy, hogy saját magát lefedje.

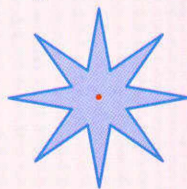
Ennek a 4 csúcsú csillagnak 4 forgási szimmetriája van, mert négy különböző helyzetben fedi saját magát.



## Szimmetria-középpont

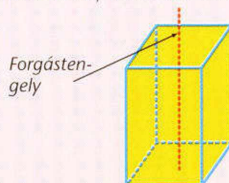
Az a pont\*, amely körül elforgatva a síkidomot, saját magával fedésbe hozható.

Ennek a csillagnak nyolc elforgatása lehet a középpontja körül.



## Forgástengely

Az a vonal, amely körül elforgatva a síkidomot, fedésbe hozható saját magával.



Forgástengely

Ennek a téglatestnek egy forgástengelye van.



# TRANSZFORMÁCIÓ

A geometriában **transzformációval** egy szakasz, síkidom vagy térbeli test helyzetét, méretét vagy alakját változtathatjuk meg. Az adott szakaszt, síkidomot vagy térbeli testet, melyet transzformálni fogunk, **tárgynak**, az eredményt, amit kapunk, **képnek** nevezzük. Transzformációt végrehajtani olyan, mint egy tárgyat **leképezni** a képmásába. Ha egy szakasz végpontjait A-val és B-vel jelöljük, akkor a kapott szakasz végpontjai A' és B'.

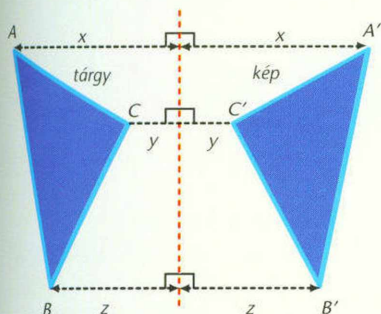
## Eltolás

Az a transzformáció, melyben az alakzatot új helyre mozdítjuk el anélkül, hogy elforgatnánk vagy tükröznénk. A transzformált kép nagysága és alakja megegyező az eredeti alakzattal. Azt a helyváltoztatást **elmozdításnak** nevezzük. A transzformáció során a pontokat egy párhuzamos szakasz mentén eltoljuk, s ezt az irányított szakaszt vektornak nevezzük.



## Tükrözés

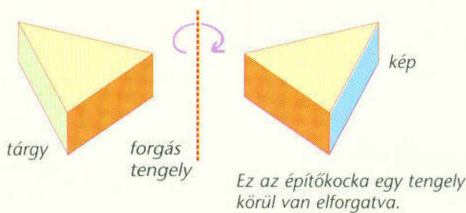
Az a transzformáció, melyben egy pont képét úgy kapjuk meg, hogy az a megadott **tükrözési tengelytől** azonos távolságra lesz az eredetivel, és az őket összekötő egyenes merőleges lesz a tükre tengelyre. Ha az alakzat síkidom, a tükrötengely egy egyenes. Ha térbeli alakzatról van szó, akkor a tükrözési tengely síklap. Tükrözéskor az alakzat mérete és szögei változatlanok maradnak, de **körüljárási** iránya megváltozik, a kép megfordul.



A tükrözött kép alakja és mérete ugyanolyan, de az eredeti alakzatnak pont az ellentettje. Az x, y és z távolság a tükrözési tengely mindkét oldalán ugyanakkora.

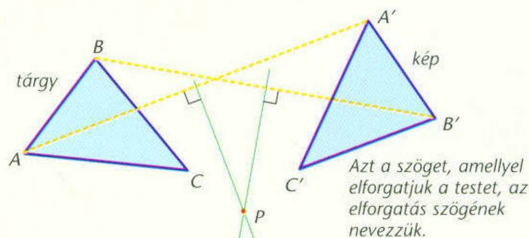
## Elforgatás

Az a transzformáció, amelyben a tárgyat úgy mozgatjuk, hogy a transzformált kép pontjai egy **adott ponttól** vagy **egyenestől** azonos távolságra maradnak attól függően, hogy ez egy síkidom vagy egy térbeli test. Az elforgatott kép nagysága és szögei ugyanakkorak, mint az eredeti tárgyé, csupán más helyzetben van a tengelyhez képest.



Ez az építőkocka egy tengely körül van elforgatva.

A forgatás középpontja lehet az alakzat határain belül, rajta vagy kívül is. A középpont meghatározásához kössük össze a tárgy bármely két pontját a kép megfelelő pontjaival. Az így keletkezett két szakasz felezőmerőlegese\* épp a forgatás középpontjában metszi egymást.



Ha az óra járásával ellentétes irányba forgatjuk el a testet, akkor azt **pozitív** iránynak mondjuk. Ha az óra járásával megegyező irányba, akkor **negatív** iránynak.

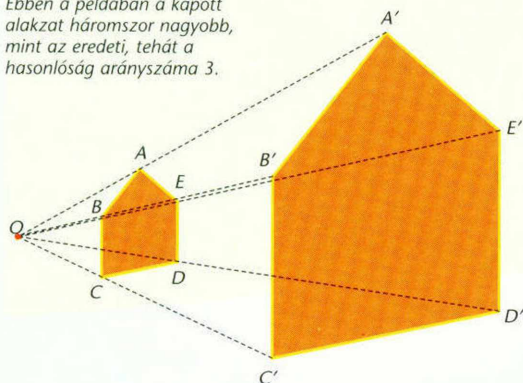




## Nagyítás

Az a transzformáció, mely megváltoztatja egy objektum méretét, de az alakját nem. Nagyíráskor meg kell adni a **nagyítás középpontját**, amely lehet az objektumon belül, az objektum határán és rajta kívül is. A nagyítás mértékét a **hasonlóság arányszámának** nevezzük.

Ebben a példában a kapott alakzat háromszor nagyobb, mint az eredeti, tehát a hasonlóság arányszáma 3.

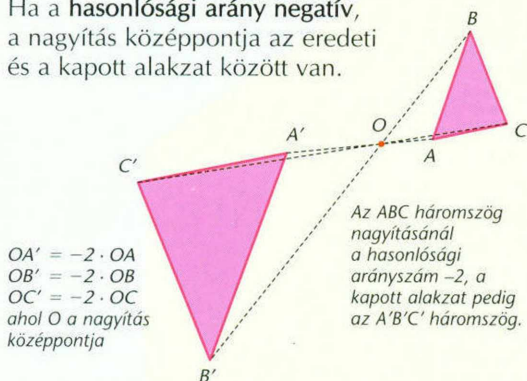


$$\begin{aligned} OA' &= 3 \cdot OA \\ OB' &= 3 \cdot OB \\ OC' &= 3 \cdot OC \\ OD' &= 3 \cdot OD \\ OE' &= 3 \cdot OE \end{aligned}$$

ahol O a nagyítás középpontja.

$$\begin{aligned} A'B' &= 3 \cdot AB \\ B'C' &= 3 \cdot BC \\ C'D' &= 3 \cdot CD \\ D'E' &= 3 \cdot DE \\ E'A' &= 3 \cdot EA \end{aligned}$$

Ha a hasonlósági arány negatív, a nagyítás középpontja az eredeti és a kapott alakzat között van.



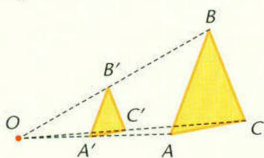
$$\begin{aligned} OA' &= -2 \cdot OA \\ OB' &= -2 \cdot OB \\ OC' &= -2 \cdot OC \end{aligned}$$

ahol O a nagyítás középpontja

Az ABC háromszög nagyításánál a hasonlósági arányszám  $-2$ , a kapott alakzat pedig az  $A'B'C'$  háromszög.

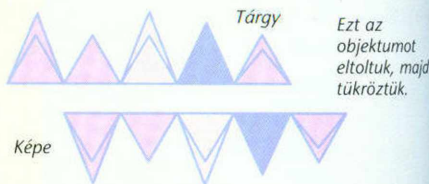
Ha a hasonlóság arányszáma  $-1$  és  $1$  között van, kicsinyítésről beszélünk.

ABC háromszög kicsinyítésénél a hasonlóság arányszáma  $\frac{1}{2}$ , ahol a kapott alakzat az  $A'B'C'$  háromszög.



## Eltolósos tükrözés

Az a transzformáció, amelyben az objektumot egy egyenes mentén tükrözzük\*, és azzal párhuzamos\* egyenes mentén eltoljuk\*. A kapott alakzat mérete és szögei megegyeznek, de a tükörképe és a helye is változhat az eredetihez képest.

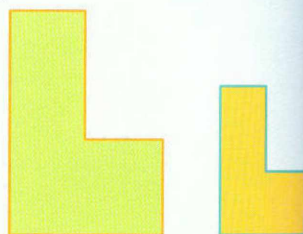


Ezt az objektumot eltoltuk, majd tükröztük.

## Hasonló alakzatok

Olyan alakzatok, melyek alakja megegyezik, de a méretük nem: ilyet kapunk például **nagyítás** esetén.

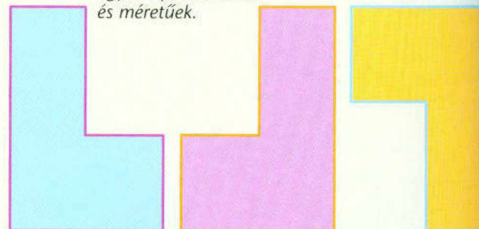
Ezek az alakzatok hasonlóak: ugyanolyan alakúak, de méretben eltérnek egymástól.



## Egybevágó alakzatok

Olyan alakzatok, melyek teljesen azonos alakúak és méretűek, de lehetnek egymás tükörképei is. Tükrözés\*, eltolás\* és elforgatás\* által létrejött alakzatok.

Ezek az alakzatok egybevágóak: ugyanolyan alakúak és méretűek.



## Invariáns (állandó) tulajdonság

Olyan tulajdonság, mely a transzformáció által nem változtatható meg. Például egy objektum alakját eltolással\*, tükrözéssel\*, elforgatással\* és nagyítással sem lehet megváltoztatni.

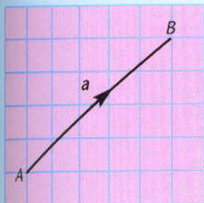


# VEKTOROK

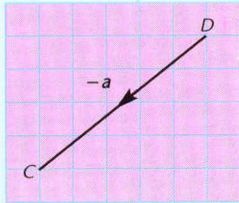
A **vektor** olyan mennyiség, amelynek **nagysága** és **iránya** van. Az **áthelyezés** (helyzetváltozás) a vektormennyiségek egy példája. A következő oldalakon a vektorok alapvető tulajdonságait mutatjuk be, amelyek minden vektormennyiségre alkalmazhatók.

## A vektorok jelölése

Az a mód, ahogy a vektorokat ábrázoljuk. A vektor egy **irányított szakasz**, amit egy nyíllal ellátott szakasszal jelölünk. A szakasz a vektor méretét jelöli, a nyíl pedig az irányát.



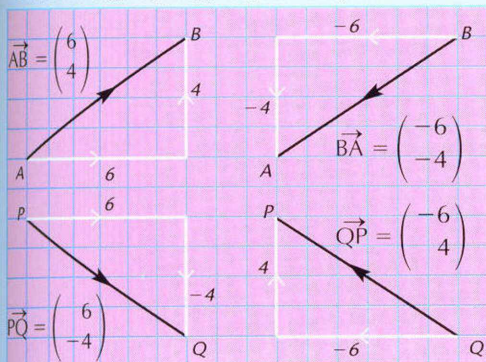
Ezt a vektort jelölhetjük úgy, hogy **AB** vagy  **$\vec{AB}$** . De lehet egyszerűen **a**-ként jelölni nyomtatásban, kézzel írva pedig **a** vagy **a**.



Ezt a vektort jelölhetjük úgy, hogy **DC** vagy  **$\vec{DC}$** . De lehet egyszerűen **-a**-ként jelölni nyomtatásban, kézzel írva pedig **-a** vagy **-a**.

Egy vektort fel lehet írni **oszlopvektorként** is, ebben a formában  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

A felső szám jelenti az **x** tengely irányában mért elmozdulást, az alsó pedig az **y** tengely irányában mért elmozdulást. A felfelé és jobbra haladó mozgás pozitív előjelű, a lefelé és balra haladó mozgás pedig negatív előjelű.



Az áthelyezés távolsága az a távolság, melyet a vektor egy megfelelő irányba megtett, például A és B távolsága 3 km.

## A vektor hossza

A vektor nagysága. Például az áthelyezés nagysága az a távolság, mellyel a tárgy helye megváltozott. A vektor hosszát **|a|**-val jelöljük.

A vektor hossza megadja a vektor méretét. A vektor hosszának meghatározásához rajzold be a elmozdulást az **x** és az **y** tengely mentén, így egy derékszögű háromszöget\* kapsz, melynek átfogója a vektor. Utána használd Pitagorasz tételét ( $a^2 + b^2 = c^2$ ), hogy megkapd az átfogó hosszát.

Például ahhoz, hogy megkapjuk **x** hosszát:

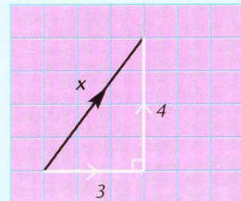
$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|x| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$|x| = \sqrt{9 + 16}$$

$$|x| = \sqrt{25}$$

$$|x| = 5$$



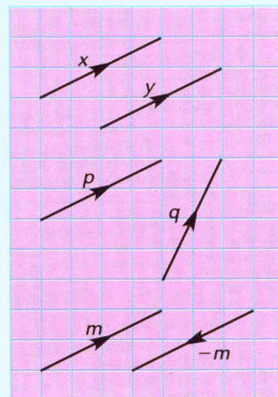
## Egyenlő vektorok

Azok a vektorok, amelyek hossza és iránya megegyezik.

**x** és **y** vektor egyenlő: ugyanolyan hosszúak és irányúak (vagyis párhuzamosak).

**p** és **q** vektorok nem egyenlők. Ugyanolyan hosszúak, de nem ugyanolyan irányúak.

**m** vektor párhuzamos **-m** vektorral, és ugyanolyan hosszú, de ellentétes irányú. A két vektor nem egyenlő.

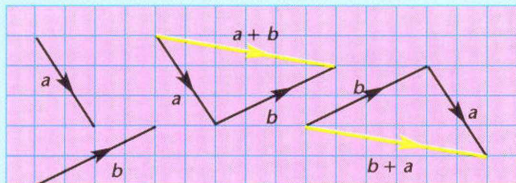




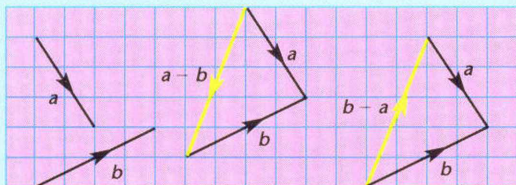
## Számolás vektorokkal

### Vektorok összeadása és kivonása

Rajzold fel az első vektort, majd a másodikat úgy, hogy annak kezdőpontja az első végpontjába kerüljön. Az első kezdőpontját a második végpontjával összekötve, hozd létre a harmadik vektort: ez az **összegvektor**. Ez az ábrázolás az  $x$  és  $y$  tengely mentén is végrehajtható.



Vektorok összeadásánál a vektorokat úgy illeszd össze, hogy azonos irányba álljanak (az óra járásával megegyező vagy ellentétes irányban felrajzolva). A vektorok összeadása kommutatív és asszociatív, vagyis  $a + b = b + a$ .



Vektorok kivonásánál a vektorokat úgy illeszd össze, hogy azonos kezdőpontból induljanak, és a végpontjaik összekötésével kapod a különbségvektort.

Két oszlopvektor\* összegének vagy különbségének kiszámításánál először a felső ( $x$  tengely menti értéket), majd az alsó ( $y$  tengely menti érték) számmal kell végrehajtani a műveletet.

Pl.:

$$a + b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b + a = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

### Skalár vagy skalármennyiség

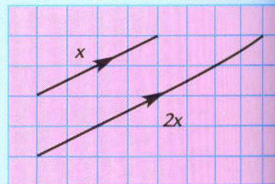
Olyan érték, amelynek nagysága\* van, de iránya nincs. A tömeg\* skalármennyiség, melynek van nagysága, de iránya nincs.

### Skalárral való szorzás

Oszlopvektorként írd fel a vektort\*, majd minden számjegyet szorozd meg egy **skalármennyiséggel**.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Az ábrán látható az  $x$  és  $2x$  vektor, amely fent látható oszlopvektorként.

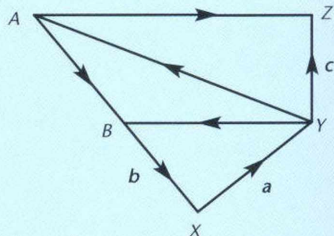


A skalárral való szorzást szoktuk **skalárszorzatnak** is nevezni. Két vektort nem lehet egymással megszorozni.

### Geometria vektorokkal

Vektorok szerkesztésénél felmerülhetnek problémák. Például a lent látható forma több vektorból épül fel. Mindegyik vektor kifejezésével megtudhatod az oldalak relatív hosszát.

Például az alsó ábrán látható, hogy az  $\vec{AX}$  szakasz felezőpontja\* a B pont. Fejezd ki az  $\vec{YB}$ ,  $\vec{AB}$ ,  $\vec{YA}$  és  $\vec{AZ}$  vektorokat.



$$\vec{YB} = \vec{YX} + \vec{XB} = -a + -b = -a - b$$

Ennek oka az, hogy  $a$  és  $b$  vektorok ellentettjét kell használni, hogy Y pontból B pontba jussunk el.

$$\vec{AB} = \vec{BX} = b$$

Mert  $\vec{AX}$  vektor felezőpontja B, és  $\vec{BX}$  szakasz azonos  $b$  vektorral.

$$\vec{YA} = \vec{YB} + \vec{BA} = (-a - b) + -b = -a - b - b = -a - 2b$$

Mert  $\vec{YB} = -a - b$  (lásd fent), és BA megfordítottja AB-nek, így ez  $-b$ .

$$\vec{AZ} = \vec{AY} + \vec{YZ} = a + 2b + c$$

Mert  $\vec{AY}$  az  $\vec{YA}$  ellentettje.

$\vec{YA} = -a - 2b$ , so  $\vec{AY}$  is  $a + 2b$ .



# GEOMETRIAI SZERKESZTÉS

A **szekesztés** a geometriai alakzatok ábrázolása. Néhányat meg lehet szekesztetni körző és vonalzó segítségével, de van, amelyhez szögmerő is szükséges.

## Körzők

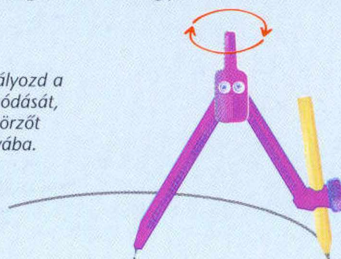
A matematikában körök\* és körívek\* rajzolására használt eszköz. Használjuk a távolságok vonalzóról papírra vagy az ábra egyik részéről a másik részére történő átmásolására. A körzőnek egy pontból kiinduló két láb van. Az egyik végében grafithegy található, a másik vége a körző hegye, amely körül forog a körző.



## Körív vagy kör rajzolása körzővel

Fogd meg a körzőt a hüvelyk- és mutatóujjaddal. Forgasd a körzőt az óramutató járásának megfelelően, vigyázva, hogy a körző mindkét szárát egyformán nyomd a papírra, és rajzold meg a kört\* vagy a körívet\*.

Hogy megakadályozd a körző összecuszkodását, dönts meg a körzőt a forgatás irányába.

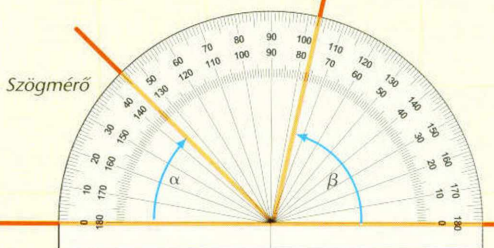


## Szögmerő

Szögek mérésére és megrajzolására szolgáló eszköz. A szögmerő általában átlátszó, lapos, kör vagy félkör alakú eszköz, melynek a szélén feltüntetik a szögeket. Amikor szöget mérsz vele, mindig a nullás beosztásnál legyen az egyik szög szár.

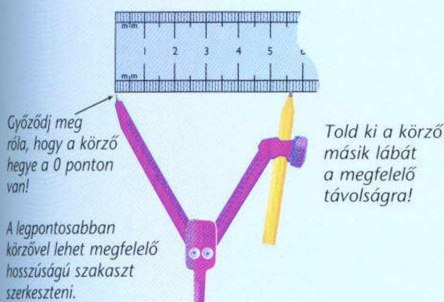
Az  $\alpha$  szög – a külső skáláról leolvasva – 45 fokal.

A  $\beta$  szög – a belső skáláról leolvasva – 77 fokal.



## Körző használata

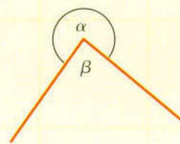
Mielőtt elkezdenéd, zárd össze a körzőt, s győződj meg arról, hogy mindkét szára egy pontba mutat. A szekesztendő távolság beállításához helyezd a körző hegyét a vonalzó 0 pontjához. Tedd a körző másik hegyét a megfelelő ponthoz.



Homorúság\* mérésekor először mérjük meg azt a szöget\*, amely ezt  $360^\circ$ -ra egészíti ki, majd ennek értékét (amely  $0^\circ$  és  $180^\circ$  közötti) vonjuk le a  $360^\circ$ -ból.

Az  $\alpha$  szög meghatározásához mérjük meg a  $\beta$ -t először, aztán ezt vonjuk le a  $360^\circ$ -ból.

Pl. ha a  $\beta$  szög =  $85^\circ$   
 $360^\circ - 85^\circ = 275^\circ$   
 akkor az  $\alpha$  szög =  $275^\circ$

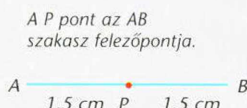




## Hasznos fogalmak a szerkesztéshez

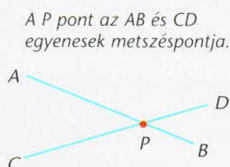
### Felezőpont

Olyan pont\*, mely pontosan megfelel egy szakaszt\*.



### Metszéspont

Olyan pont\*, amelyben két egyenes metszi egymást.



### Egyenlő távolságban lévő

Olyan pontok\* halmaza, amelyek azonos távolságra vannak egy vagy több ponttól, egyenestől vagy más alakzattól.



### Szögfelező

Olyan egyenes, mely egy adott szöget\* két egyenlő szögtartományra oszt.



### Felező merőleges

Olyan egyenes, mely merőleges\* egy szakaszra, és felezi azt.

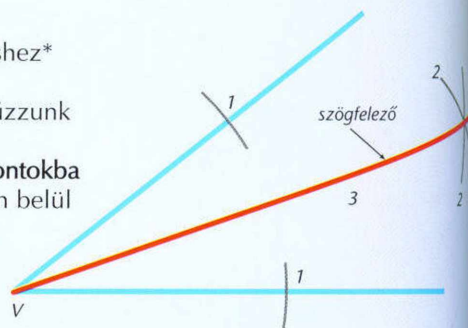


## Alapszerkesztések

### Szögfelezés

Az ábra mutatja, milyen lépéseket kell a szögfelezéshez\* végrehajtani:

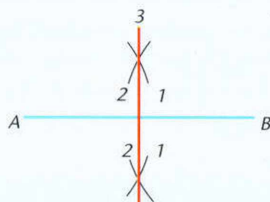
1. Szűrjük a körzőnket\* a szög csúcsába\* (V), és húzzunk köríveket\*, amelyek metszik\* a szög szárait\*.
2. Szűrjük a körzőnket az így keletkezett **metszéspontokba** és húzzunk köríveket, melyek a szögtartományon belül metszik egymást.
3. Kössük össze a most kapott pontot a szög csúcsával. Az így kapott egyenes a **szögfelező**.



### Szakaszfelező merőleges szerkesztése

Egy AB szakasz **felezőmerőlegesének** szerkesztése a következő:

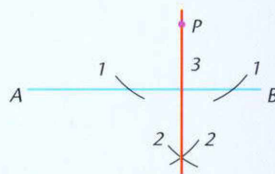
1. Nyissuk ki a körzőnket\* a szakasz felénél valamivel nagyobbra! Szűrjük a körzőt az A pontba, és húzzunk körívet\* mindkét oldalon!
2. A körző nyílásának megváltoztatása nélkül szűrjük a körzőt a B pontba, és körözzünk vele mindkét oldalra!
3. A két metszéspont összekötésével kapjuk a szakasz felező merőlegesét.



### Merőleges egyenes szerkesztése adott pontból

Szerkesszünk olyan egyenest, amely merőleges\* az AB egyenesre, és átmegy a külső P ponton:

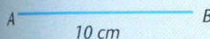
1. Szűrjük a körzőnket a P pontba, és metsszük el két kis ívvel az AB egyenest!
2. Az így keletkezett metszéspontokból újabb köríveket húzzunk az egyenes másik oldalára.
3. Az itt keletkező metszéspontot kössük össze a P ponttal! Az így kapott egyenes merőleges lesz az AB egyenesre.



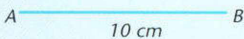


## Háromszögek szerkesztése

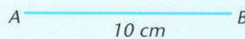
### Háromszög szerkesztése a három oldal ismeretében



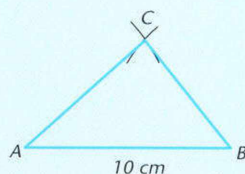
1. Húzzuk meg a leghosszabb oldalt, és jelöljük a végpontjait A és B pontokkal!



2. Szúrjuk a körzőnket A-ba, és húzzunk a háromszög másik oldalának megfelelő nagyságú körívet!

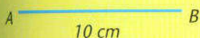


3. Szúrjuk a körzőnket B-be, és húzzunk a háromszög harmadik oldalának megfelelő nagyságú körívet!

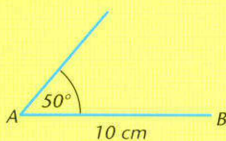


4. Kössük össze A-t és B-t a **metszésponttal!** (Egyenlő oldalú háromszög szerkesztésekor tartuk a körzőt AB oldalnak megfelelő nyílásban!)

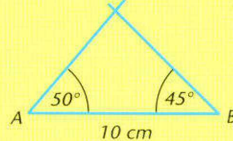
### Háromszög szerkesztése két szög és egy oldal ismeretében



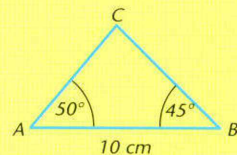
1. Húzzunk az adott oldalal egyenlő szakaszt, és jelöljük a végpontjait A-val, illetve B-vel!



2. Szögmérő\* segítségével mérjük fel az egyik szöget\* A-ból, így megkapjuk a háromszög másik oldalát!

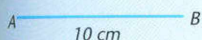


3. Szögmérő segítségével mérjük fel a másik szöget B-ből, így megkapjuk a háromszög harmadik oldalát!

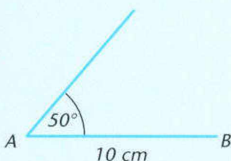


4. Jelöljük C-vel a két egyenes metszéspontját!

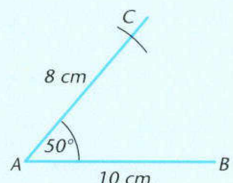
### Háromszög szerkesztése két oldal és a közbezárt szög ismeretében



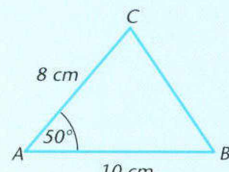
1. Húzzuk meg a leghosszabb oldalt, és jelöljük a végpontjait A és B pontokkal.



2. Szögmérő segítségével mérjük fel a szöget A-ból, így megkapjuk a háromszög másik oldalát!



3. Mérjük fel a másik oldal hosszát az előbb keletkezett egyenesre, és az így kapott pontot jelöljük C-vel!

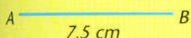


4. Kössük össze B és C pontokat, és megkapjuk a háromszöget!

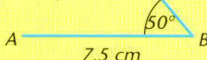
### Háromszög szerkesztése két megoldással

Ha a háromszöghöz megadott adatok nem elegendőek az egyértelmű szerkesztéshez, két lehetséges megoldás is van. Ezeket **különböző (kétértelmű)** eseteknek mondjuk.

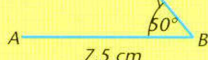
Például, ha adott egy háromszög  
 $AB = 7,5 \text{ cm}$  és  $AC = 5 \text{ cm}$  oldala  
 és az  $\angle ABC = 50^\circ$  szöge\*:



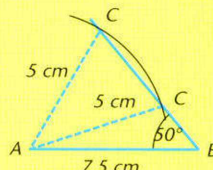
1. Húzzuk meg az AB oldalt!



2. Használjuk a szögmérőt\* az  $\angle ABC$  szög felméréséhez!



3. Nyissuk ki a körzőt\* AC oldalnak megfelelő nagyságra, és húzzunk vele körívet\* A-ból!



4. Két különböző metszéspontot kapunk, ami azt jelenti, hogy két különböző háromszög is megfelel a fenti adatoknak.





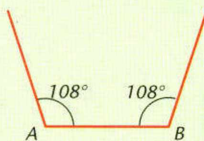
## Más szerkesztések

### Szabályos sokszög\* szerkesztése

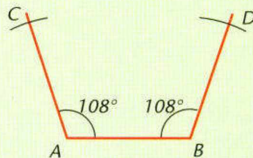
Például egy szabályos ötszög\* szerkesztéséhez osszuk el a belső szögek\* összegét ( $540^\circ$ ) az ötszög szögeinek\* számával (5), így megkapjuk egy belső szög nagyságát ( $108^\circ$ ).

A ————— B

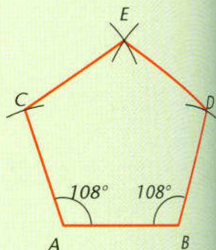
1. Rajzoljunk egy szakaszt, ami az ötszög alapja lesz! Jelöljük a végpontjait A-val és B-vel!



2. Szögmérő\* segítségével mérjük fel a kapott szöget A-ból is, és B-ből is!

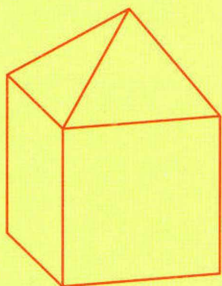


3. Körzővel\* mérjük fel az alap hosszát mindkét most keletkezett szárra\* (C és D)!

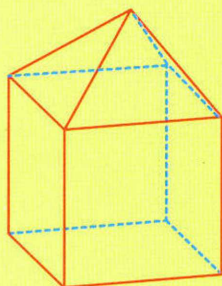


4. Szúrjuk be a körzőt a C és D pontokba, és húzzunk az alapnak megfelelő nagyságú köríveket! Ahol az ívek metszik egymást, ott lesz az E pont. C, D és E pont összekötésével kész az ötszög.

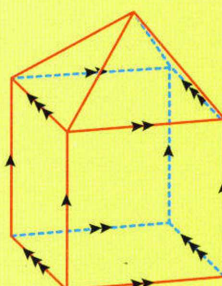
### Egyenes oldalú testek rajzolása



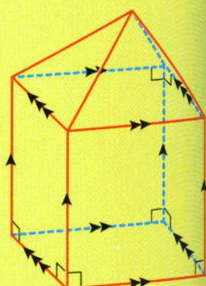
1. Rajzoljuk meg a látható éleket! Győződjünk meg arról, hogy a függőleges\* vonalak függőlegesek legyenek!



2. A nem látható éleket szaggatott vonallal jelöljük!



3. Jelöljük a párhuzamos\* éleket! Ha különböző élek is előfordulnak, használjunk különböző jelöléseket!



4. Jelöljük a derékszögeket\* az ábrán; ez fontos lehet főleg azoknál a szögeknél, melyeken nem látszik, hogy  $90^\circ$ -osak.

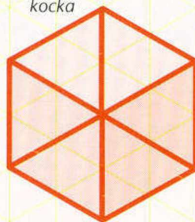
### Előrenyomatott hálózatok

Vannak előrenyomatott papírok, melyek megkönnyítik a háromdimenziós\* ábrázolást. Párhuzamos\* egyenes csoportok, melyek  $60^\circ$ -os szöget zárnak be egymással.

Ha ilyen papírt használsz, mindig győződj meg róla, hogy a lent látható jelek függőlegesen álljanak.



kocka



négyszet alapú gúla



téglatest

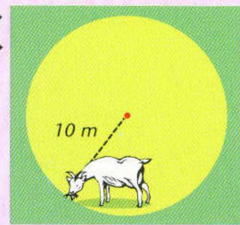


Ennek a papírnak a használata megkönnyíti a szögek és a térbeli\* alakzatok ábrázolását.



# NEVEZETES MÉRTANI HELYEK

A **mértani helyek** olyan ponthalmazok\*, melyek valamilyen különleges feltételnek tesznek eleget. Ez lehet valaminek a pályája vagy a környezete. Ha például egy helyben állsz előrenyújtott kézzel, majd körben forogsz, eközben az ujjvéged körpályát ír le. A tested lesz a kör középpontja\*, a karod hossza pedig a kör sugara.

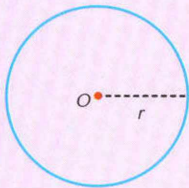


Ezt a kecskét 10 m hosszú kötél-lel kötötték ki egy póznához a mezőn. Az a terület, ahol enni tud anélkül, hogy elszakítaná a kötelet, kör, melynek középpontja a cölöp, a sugara\* pedig a 10 méteres kötél.

## Adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok

Egy rögzített ponttól\* egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon egy kör.

Egy adott  $O$  ponttól egyenlő  $r$  távolságra lévő pontok egy körön vannak.  $O$  a kör középpontja,  $r$  a sugara.



## Két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok

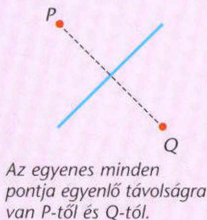
Két rögzített ponttól\*

egyenlő távolságra levő

pontok halmaza a síkon

a két pontot összekötő

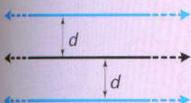
szakasz felező merőlegese\*.



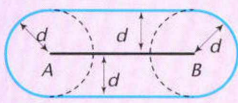
Az egyenes minden pontja egyenlő távolságra van P-től és Q-tól.

## Egy egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok

Azon pontok\* mértani helye a síkon, melyek egy adott egyenestől egyenlő távolságra ( $d$ ) vannak, két párhuzamos\* egyenes, mely a rögzített egyenes két oldalán halad tőle  $d$  távolságra.



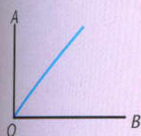
Minden egyeneshez tartozó, tőle adott távolságra lévő egyenesek az eredetivel egyenlő hosszúak.



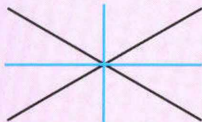
Szakasz\* esetén két párhuzamos\* szakaszból van szó, két félkörrel\* a végükön.

## Metsző egyenesektől egyenlő távolságra lévő pontok

Két egymást metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok\* halmaza a síkon a két egyenes által bezárt szögek\* felezője.



A szögfelező bármely pontja egyenlő távolságra van OA és OB száraktól.



A metsző egyenesek szögfelezői (az ábrán késsel jelölve) mindig merőlegesek\* egymásra.

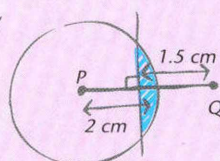
## Összetett mértani helyek

Olyan ponthalmazok\*, melyeknek egyszerre több feltételnek is eleget kell tenniük. Ezek megrajzolásához:

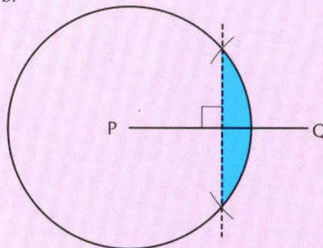
1. Készíts vázlatot a várható mértani helyről!
2. Használj körzőt\*, vonalzót a végső ábra elkészítéséhez! Ne radirozz ki egyetlen szerkesztési vonalat sem!
3. Használj megfelelő betűjeleket az ábrán, hogy áttekinthető legyen, és könnyen eligazodj rajta!
4. Satirozd be az ábrán azt a részt, mely eleget tesz a feltételeknek! Használj összefüggő vonalat arra a határvonalra, amely hozzátartozik a meghatározott részhez, és szaggatott vonallal jelöld azt a határvonalat, amely nem!

Például, P és Q pont távolsága legyen 3 cm. Keressük azokat a pontokat, melyek P-től való távolsága kisebb, mint 2 cm, de közelebb van Q-hoz, mint P-hez!

1. Készítsünk vázlatot! Ahhoz, hogy megtaláljuk azokat a pontokat, melyek 2 cm-nél közelebb vannak P-hez, rajzoljunk egy 2 cm sugarú\* kört P körül. Hogy megtaláljuk, mely pontok vannak Q-hoz közelebb, mint P-hez, húzzuk meg PQ felező merőlegesét\*.



2. Szerkesszük meg! Itt a felező merőleges szaggatott vonal, pontjai nem tartoznak a keresett mértani helyhez, hiszen egyenlő távolságra vannak P-től és Q-tól, tehát nincsenek Q-hoz közelebb.



A sátirozott rész lesz az a ponthalmaz, mely P-től 2 cm-nél kisebb távolságra van, és Q-hoz van közelebb.



# KICSINYÍTÉS, NAGYÍTÁS

Több tárgy túl nagy vagy túl kicsi ahhoz, hogy valóságos méretében rajzoljuk meg. A **méterarányos ábrázolás** a tárgyak minden adatát a megfelelő arányban\* kicsinyíti vagy nagyítja. A rajz kisebb vagy nagyobb, mint az eredeti tárgy, de a mérőszámok közötti kapcsolat megegyezik az eredetiével.

## Méterarány

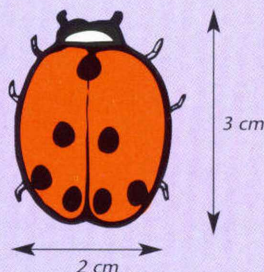
Állandó arány, mely megmutatja a kapcsolatot a rajz (vagy modell) és az eredeti tárgy között. Az arányt  $x : y$  osztás adja, ahol  $x$  az ábra,  $y$  az eredeti tárgy megfelelő méreteit mutatja.

Például az  $1 : 1000$  arány azt jelenti, hogy egységnyi hosszúság a rajzon 1000 egység a valóságban.

## Nagyítás

Azt jelenti, hogy arányosan\* növeljük valaminek a méreteit. Nagyításakor az aránypárban az első szám nagyobb, mint a második.

Pl. arány =  $3 : 1$



Ez a csillag nagyított.

Ez a párizsi Eiffel-torony méretarányos rajza. A valóságban a torony 70 000-szer nagyobb.



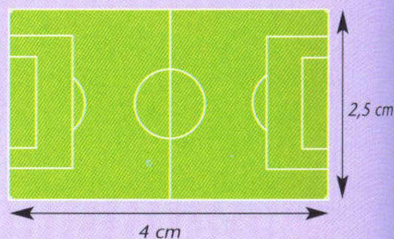
## Kicsinyítés

Azt jelenti, hogy arányosan\* csökkentjük valaminek a méreteit. Kicsinyítésakor az aránypárban az első szám kisebb, mint a második.



Ez a csillag kicsinyített.

Pl. A kicsinyítés aránya  $1 : 2750$



A fenti ábra egy futballpálya kicsinyített mása, ahol 1 cm a valóságban 2750 cm. Mekkora a pálya valódi mérete méterben 10-esekre kerekítve?

4 cm jelentése  $4 \cdot 2750 \text{ cm} = 11\,000 \text{ cm} = 110 \text{ m}$

2,5 cm jelentése  $2,5 \cdot 2750 \text{ cm} = 6875 \text{ cm} = 68,75 \text{ m} = 70 \text{ m}$  (kerekítve)

A futballpálya 110 m hosszú és 70 m széles.

Az ábrán egy katicabogár méretarányos rajza szerepel, ahol 3 cm a valóságban csak 1 cm. Adjuk meg a katica méreteit mm-ben.

3 cm jelentése  $3 : 3 \text{ cm} = 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$   
 2 cm jelentése  $2 : 3 \text{ cm} = 0,66 \text{ cm} = 7 \text{ mm}$  (kerekítve)

A katicabogár 10 mm hosszú, és 7 mm széles.

## Arányszám

Az a számérték, ahogy egy tárgy képén a mérete csökkent vagy nőtt. Például, ha valami tízszeresére nőtt, az arányszám 10. Ha valami a felére csökken, az arányszám  $\frac{1}{2}$ . Hogy kiszámíthassuk az arányszámot:

$$\text{Arányszám} = \frac{\text{ábrázolt hossz}}{\text{eredeti hossz}}$$

(Nézd meg a nagyítás címszót a 44. oldalon!)

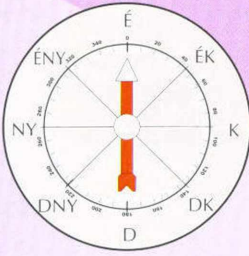


## Irány

### Iránytű

Eszköz a tájolóshoz. Az iránytűben egy kis tűsken mágnesű van, amely szabadon elfordulhat, így mindig észak felé mutat. A négy fő iránypont a tájoló: észak (É) a tetején, dél (D) az alján, kelet (K) jobbra és nyugat (NY) balra. Köztük található másodlagos pontok: északkelet (ÉK), délkelet (DK), délnyugat (DNY) és északnyugat (ÉNY).

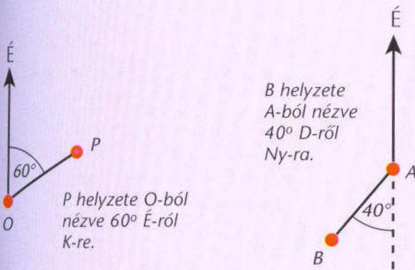
Ez a kép a nyolc égtől elhelyezkedését mutatja az iránytűn. A belső körön látható vonalak a fokokat jelzik.



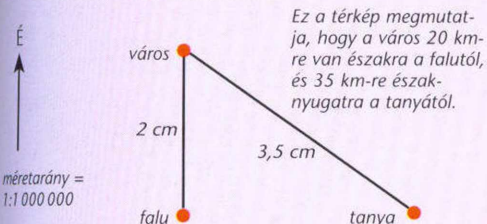
Északot gyakran nyíllal jelöljük. Ha ismerjük, merre van észak, onnan már következtethetünk a többi irányra is.

A pont B-től nyugatra, C pont B-től délre van. B pont A-tól keletre és C-től északra van.

Ha egy irány a fő égtájak közé esik, akkor a tőlük való eltérés szögét szokás megadni, attól függően, melyikhez van közelebb.



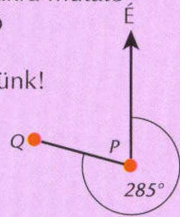
Méretarányok, irányok és támpontok segítségével olyan ábrákat készíthetünk, mint egy térkép, pontosan megmutatva a távolságokat és irányokat.



### Leírás három számjeggyel

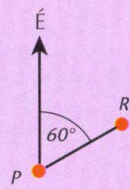
Olyan eljárás, mely során megadhatjuk egy pont helyét egy másikhoz képest. A kiindulási pont mindig észak, innen haladunk az óramutató járása szerint. Ahhoz, hogy megkapjuk Q pont helyzetét P-hez képest, induljunk el egy P-ből északra mutató félegyenessel az óramutató járásával azonos irányba jobbra, míg Q-hoz nem érünk!

Például az ábrán Q pont háromjeggyű helyzete P pontból 285°.



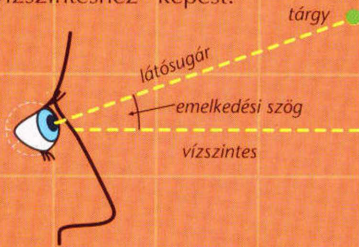
Ha az elfordulás szöge 100°-nál kisebb, tegyük egy nullát a fokszám elé, így háromjeggyű számot kapunk!

Például, az R pont helyzete P-ből 060°.



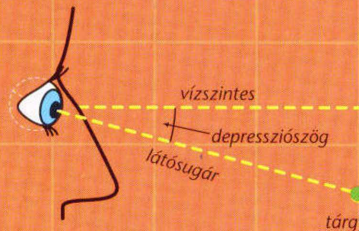
### Emelkedési szög

Megmutatja, hogy a tárgy felé nézve látósugarunk mekkora szöggel\* emelkedik a vízszinteshez\* képest.



### Depressziószög

Annak a látósugárnak a vízszintessel\* bezárt szöge\*, mely a megfigyelőtől egy nála alacsonyabb tárgyra irányul.





## Arányos méretrajz készítése

### Készítsünk méretarányos rajzot

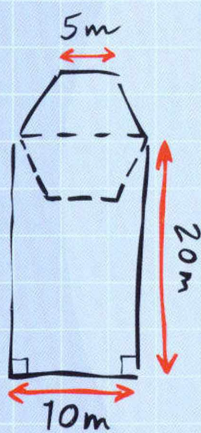
1. Készítsünk vázlatot a tárgyról! Ez nyers elképzelés arról, végül hogyan kell kinéznie a rajznak.
2. Válasszunk megfelelő léptéket\* a rajzhoz!
3. Készítsünk még egy vázlatot, amelyen bejelölünk minden méretet, szöget, amelynek segítségével elkészíthetjük a végső rajzot.
4. Szerkesszük meg a pontos végső ábrát a mérőszámok segítségével, amelyeket kiszámoltunk!
5. Jelöljük a léptéket a rajzon! Ha szükséges, adjunk neki címet!
6. Állapítsuk meg az ismeretlen adatokat távolságméréssel, körző\* vagy vonalzó segítségével. A kapott számot szorozzuk meg az arányszámmal\*.

### Feladat:

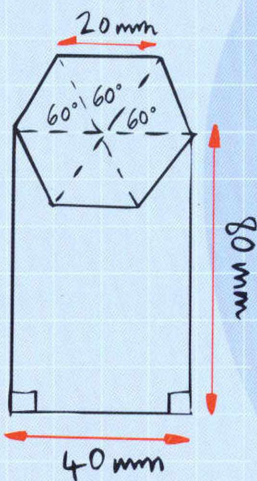
Egy szabadidőközpont felújítása során a téglalap alakú úszómedence végébe sekély vizű gyerekmedencét építettek. A medence eredeti mérete 10 m · 20 m. A gyerekmedence alakja egy szabályos hatszög fele, melynek oldalai 5 m hosszúak.

Rajzold meg az uszoda kicsinyített rajzát! Használj olyan méretarányt, ahol 1 cm 2,5 m-nek felel meg! A rajz segítségével állapítsd meg, mekkora az uszoda teljes hossza méterben, tízedekre kerekítve!

A vázlat mutatja az aktuális méreteket.

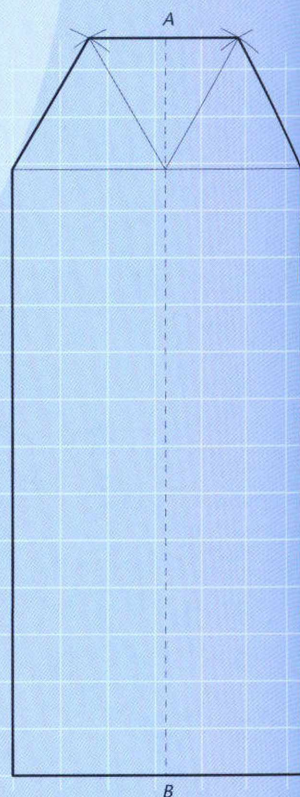


Még pontosabb vázlat, már a méretarányos adatokkal.



Méreтарány  
1 cm : 2,5 m

Új úszómedence



Az A pont a gyerekmedence végének felezőpontja, a B az átellenes fal felezőpontja. A rajzból AB mérete 97 mm, így az uszoda teljes hossza 24,3 m (tizedekre kerekítve)

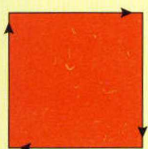


# KERÜLET, TERÜLET

Az a hosszúság, amelyet egy alakzat élei mentén körbehaladva megteszünk, az alakzat **kerülete**. Egy kétdimenziós alakzat által elfoglalt síkrész mérőszáma a terület. Az alakzatok területét **egységnégyzetekben** szoktuk megadni: a kisebb területek esetében ez négyzetmilliméter ( $\text{mm}^2$ ), négyzetcentiméter ( $\text{cm}^2$ ) a nagyobb területekben négyzetméter ( $\text{m}^2$ ) vagy négyzetkilométer ( $\text{km}^2$ ). A nagyon nagy területekre, mint egy farm vagy tanya a hektárt (ha) használjuk. Egy hektár  $10\,000\text{ m}^2$  vagy  $10\text{ km}^2$ .

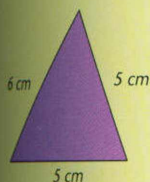
## Kerület

Az egyenes oldalakból álló alakzat kerületének meghatározásához adjuk össze oldalainak a hosszát!



kerület =  
az oldalak  
hosszának  
összege

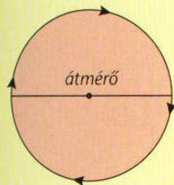
Kerület = az oldalak összege\*



Például a háromszög kerülete:  
 $6 + 5 + 5 = 16\text{ cm}$

A kör kerületének meghatározása: szorozzuk meg a kör átmérőjét  $\pi$ -vel\*.  $\pi$  közelítő értéke 3,14, vagy megadhatod az eredményt  $\pi$ -vel is.  $\pi$ -re a görög szimbólumot használjuk:  $\pi$ .

A körvonal hossza a kör kerülete. Az átmérő a középponton áthaladó szakasz.



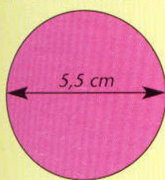
A kör kerületének képlete:

$$\text{Kerület} = \pi \cdot d \text{ (vagy } \pi d)$$

ahol  $d$  a kör átmérője.

Például ennek a körnek a kerülete:

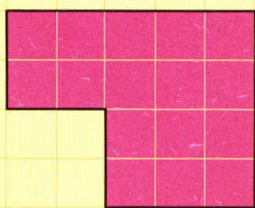
$$\begin{aligned} &\pi \cdot d \\ &= \pi \cdot 5,5 \\ &= 5,5\pi\text{ cm} \\ &\text{vagy} \\ &5,5 \cdot 3,14 \\ &= 17,27\text{ cm} \end{aligned}$$



## Terület

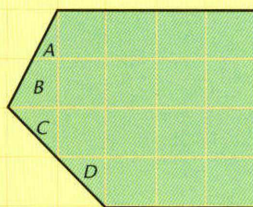
### Területszámítás

Hogy kiszámoljuk egy alakzat területét, rajzoljuk fel egy négyzetrácsos papírra és számoljuk meg a négyzeteket.



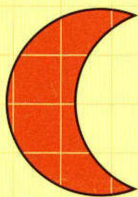
Ennek az alakzatnak a területe 16 területegység.

Ha egy sokszög\* nem pontosan illeszkedik a négyzetrács éleire, számoljuk meg a belsejében lévő egész négyzeteket, aztán adjuk hozzá azokat, ahány négyzetet tudunk össze tudunk rakni a kimaradó részekből.



Ennek az alakzatnak a belsejében 15 egész négyzet van, A és B együtt kitesz még egy négyzetet, és C és D ugyancsak. A terület így 17 terület egység ( $15 + 2$ ).

Ha egy alakzatot csupa görbe vonal határol, becsüljük meg a területét annak segítségével, hogy a betöltött rész több vagy kevesebb, mint egy négyzet, vagy annak a fele. Figyelmen kívül hagyhatjuk a fél négyzetről kisebb területeket.



Ennek az alakzatnak a területe megközelítőleg 4 területegység.



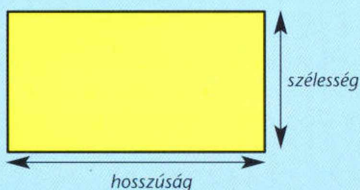


## Területképletek

A különböző alakzatok területének kiszámítására használhatunk képleteket\*. Ezeket a szabályokat alkalmazhatjuk különböző méretű alakzatok esetén.

### A téglalap területe

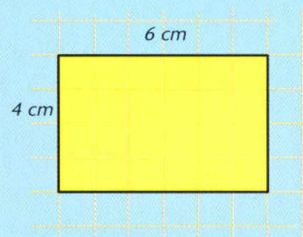
A téglalap\* területének kiszámításához számoljuk ki vagy mérjük meg a hosszát és a szélességét, majd szorozzuk össze őket.



A téglalap területének kiszámítása:

$$\text{Terület} = \text{hosszúság} \cdot \text{szélesség}$$

Ezt a következő képlet\* írja le:  $T = a \cdot b$  ahol  $a$  a téglalap hosszúsága,  $b$  a szélessége.



Például ennek a téglalapnak a területe:  
 $6 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2$

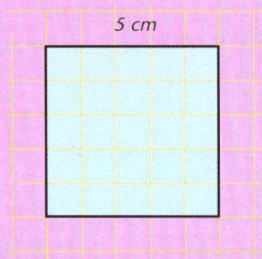
### A négyzet területe

A téglalap területéhez hasonlóan, itt is szorozzuk meg a szélességet a hosszúsággal.

Mivel a négyzet\* esetén ez a kettő megegyezik, a területet így írhatjuk fel:

$$\text{Terület} = (\text{oldal})^2$$

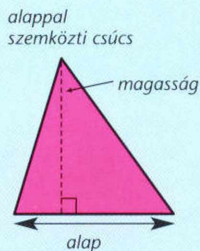
$$T = a^2$$



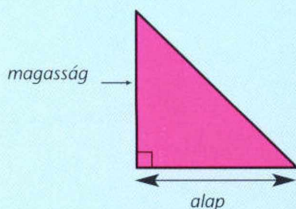
Pl.: ennek a négyzetnek a területe:  
 $5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$

### A háromszög területe

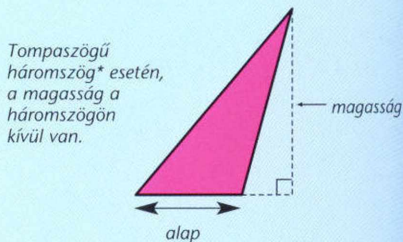
A háromszög\* területének kiszámításához szükségünk lesz a **magasságára**. A magasság az alappal szemközti csúsból\* az alap egyenesére állított merőleges. A háromszög bármelyik oldala lehet alap.



Hegyszögű háromszögben a magasság a háromszögön belül van.



Derékszögű háromszögben a magasság egybeesik az egyik oldallal.

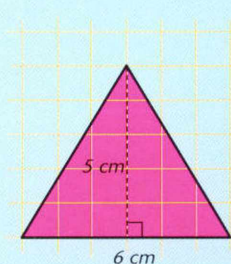


Tompaszögű háromszög\* esetén, a magasság a háromszögön kívül van.

A háromszög területének kiszámítása:

$$\text{Terület} = \frac{1}{2} \cdot (\text{alap} \cdot \text{magasság})$$

$$\text{Képlettel*}: T = \frac{1}{2} am.$$

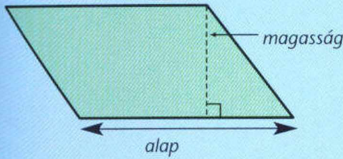


Például ennek a háromszögnek a területe:  
 $\frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 6) =$   
 $\frac{1}{2} \cdot 30 = 15 \text{ cm}^2$



**A paralelogramma területe**

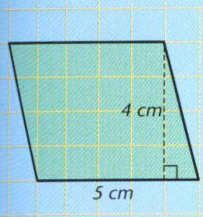
A terület kiszámításához szükség lesz a **magasságra**. A magasság itt is az alappal szemköztí csúsból\* az alap egyenesére állított merőleges.



A paralelogramma területének kiszámítása:

$$\text{Terület} = \text{alap} \cdot \text{magasság}$$

Képlettel\*:  $T = am$

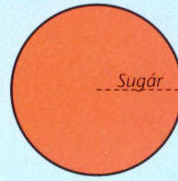


Például ennek a paralelogrammának a területe:  
 $4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}^2$

**A kör területe**

A kör területének kiszámításához elegendő ismerni a sugarát. A sugár a kör középpontjának és a kerületén lévő bármely pontnak a távolsága.

A kör területének kiszámítása:



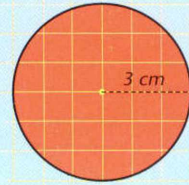
$$\text{Terület} = \pi \cdot r^2$$

$$T = \pi r^2$$

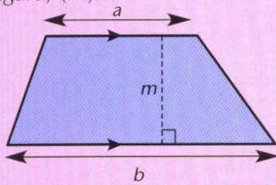
Ahol  $\pi$  (Pi) megközelítőleg 3,14,  $r$  pedig a kör sugara.

Például ennek a körnek a területe:

$$\begin{aligned} &\pi \cdot 3^2 \\ &= 3,14 \cdot 9 \\ &= 28,3 \text{ cm}^2 \\ &(\text{tizedekre kerekítve}) \end{aligned}$$

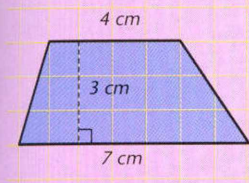
**A trapéz területe**

A terület kiszámításához szükség lesz a párhuzamos\* oldalak hosszára (a és c) és a köztük lévő távolságra (a trapéz magasságára) (m).



A terület kiszámításának képlete:

$$T = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot m$$



például, ennek a trapéznek a területe:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot (4 + 7) \cdot 3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 33 \\ &= 16,5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

**Felszín**

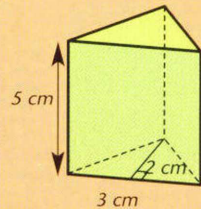
Egy test oldallapjai területének összege\* a **test felszíne**.

Egy test felszínének kiszámítása:

**Felszín = a felületet alkotó területek összege**

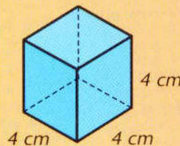
Például ennek a prizmának a felszínét 3 egybevágó téglalap és két egybevágó háromszög alkotja. Így felszínének kiszámítása:

$$\begin{aligned} &3(5 \cdot 3) + 2\left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\right) \\ &= 45 + 6 \\ &= 51 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



A szabályos testek\* felszínét általában így számíttjuk:

**Felszín = oldalak területe · oldalak száma**



Ennek a kockának a felszíne:

$$\begin{aligned} &6 \cdot (4 \cdot 4) \\ &= 96 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

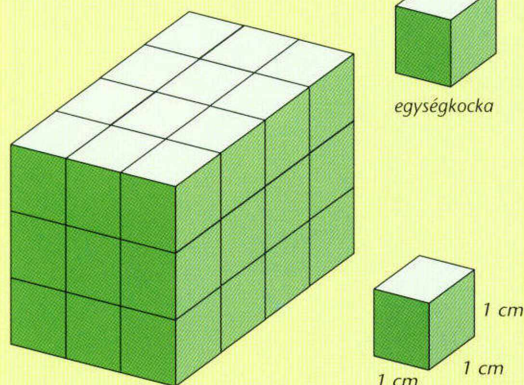




# TÉRFOGAT

A háromdimenziós\* test által kijelölt térrészt a test **térfogatának** nevezzük. Nagyságát úgy mérhetjük, hogy megszámloljuk, hány **egységkocka** fér el benne. A térfogat mértékegysége a hosszúság mértékegységeiből származik. Pl.: köbcentiméter ( $\text{cm}^3$ ), köbméter ( $\text{m}^3$ ).

A 36 kockából álló lenti test ( $3 \cdot 4 \cdot 3$  kocka egymásra rétegezve) térfogatát úgy számíthatjuk ki:  $3 \cdot 4 \cdot 3 = 12$  térfogat-egység.



Ha egy egységkocka térfogata  $1 \text{ cm}^3$ , akkor a téglatest térfogata  $36 \text{ cm}^3$ .

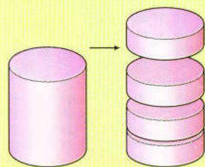
$$1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^3$$

## Térfogatképletek

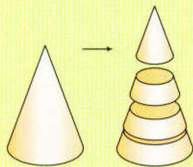
A különböző alakzatok térfogatának kiszámítására használhatjuk a képleteket\*. Ezeket a szabályokat alkalmazhatjuk különböző méretű testek esetén.

A térfogat kiszámításához legtöbbször szükség van az alapterület\* kiszámítására. Ez azért van, mert a legtöbb testet úgy származtatjuk, hogy az alpra több réteg kerül, mint például a fenti téglatest esetén.

Néhány test esetében ezek a rétegek egyenlő területűek (pl. henger). Ezeknél bármely **keresztmetszet egyforma**. Másoknál, mint például a kúp, a rétegek formája – és így a területe is – változik.



A henger bármely rétegének formája és területe megegyezik.

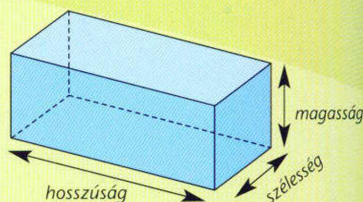


A kúp különböző rétegének formája és területe különböző.

## A téglatest térfogata

A téglatest térfogatának kiszámítása:

$$\text{Térfogat} = \text{hosszúság} \cdot \text{szélesség} \cdot \text{magasság}$$

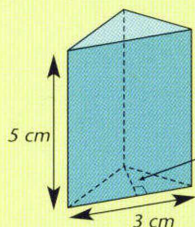


Például annak a téglatestnek a térfogata, melynek hosszúsága 8 cm, szélessége 3 cm és magassága 4 cm:  $8 \cdot 3 \cdot 4 = 96 \text{ cm}^3$ .

## A prizma (vagy hasáb) térfogata

A prizma térfogatának kiszámítása:

$$\text{Térfogat} = \text{keresztmetszet területe} \cdot \text{magasság}$$



A keresztmetszet területének kiszámítása az alap alakjától függ. (lásd 56–57. oldal).

Ennek a hasábnak az alapja háromszög, így szükségünk van a háromszög területének képletére:

$$\text{Terület} = \frac{1}{2} \cdot (\text{alap} \cdot \text{magasság})$$

Így a hasáb térfogata:

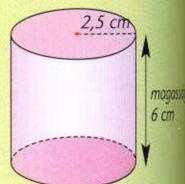
$$\left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\right) \cdot 5 = 5 \text{ cm}^3$$

Egy henger alapja kör, így a térfogatának kiszámításához a kör területét kell megszorozni a henger magasságával.

$$\text{Térfogat} = \pi r^2 \cdot \text{magasság}$$

Például ennél a hengernél:

$$\begin{aligned} & \pi \cdot (2,5)^2 \cdot 6 \\ &= \pi \cdot 6,25 \cdot 6 \\ &= 117,75 \text{ cm}^3 \\ &= 118 \text{ cm}^3 \text{ (kerekítve)} \end{aligned}$$



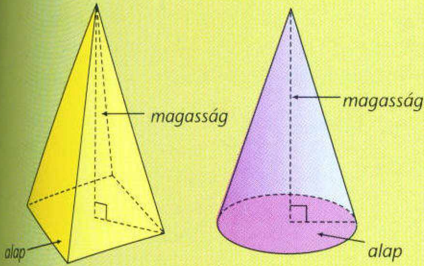
\*terület 55; kúp 41; keresztmetszet 41; téglatest 41 (prizma, hasáb); képlet 75; tömeg 72; hasáb 41; gúla (piramis) 68; sugár 65; háromdimenziós 31 (dimenziók).



## A gúla vagy kúp térfogata

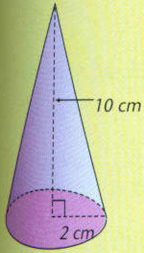
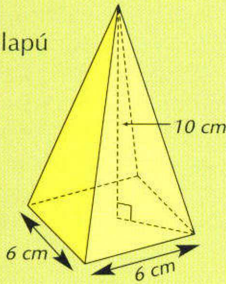
A gúla\* vagy kúp\* térfogatának kiszámítása:

$$\text{Térfogat} = \frac{1}{3} \cdot \text{alapterület} \cdot \text{magasság}$$



Például ennek a négyzet alapú gúlának a térfogata:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \cdot (6 \cdot 6) \cdot 10 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 10 \\ &= 120 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



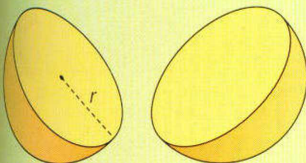
A kúp térfogata:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 10 \\ &= \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 4) \cdot 10 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 125,66371 \\ &= 41,9 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

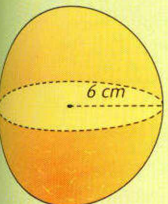
## A gömb térfogata

A gömb térfogatának kiszámítása:

$$\text{Térfogat} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Ahol  $r$  a gömb maximális keresztmetszetének\* (főkörének) sugara\*.

Ezt a gömböt a főköre mentén vágtuk ketté.



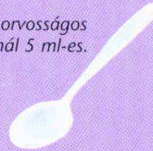
Ennek a gömbnek a térfogatát a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 216 \\ &= 904 \text{ cm}^3 \text{ (kerekítve)} \end{aligned}$$

## Térfogat és űrtartalom

Egy tárgy térfogata tulajdonképpen az **űrtartalma** is, hisz megmutatja, hogy mennyi anyaggal lehet kitölteni. Az űrtartalom mértékegysége a milliliter (ml) vagy a liter (l).A térfogat és űrtartalom mértékegységei a következőképpen feleltethetők meg egymásnak: 1 cm<sup>3</sup>-nek 1 ml felel meg, míg 1 liter az 1000 cm<sup>3</sup>.

Az orvosságos kanál 5 ml-es.



Ennek a dobozos narancslének az űrtartalma 1 l.



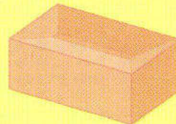
## Sűrűség

A **sűrűség** az anyag egységnyi térfogatának a tömege\*, amely függ az anyag minőségétől. Általában a tömeg és a térfogat hányadosaként számoljuk. A sűrűség mértékegysége gramm / köbcentiméter (g/cm<sup>3</sup>) vagy kilogramm / köbméter (kg/m<sup>3</sup>).

A kiszámítás képlete:

$$\text{Sűrűség} = \frac{\text{tömeg}}{\text{térfogat}}$$

Például számítsuk ki a téglának és a fürdőszivacsnak a sűrűségét:

a téglá tömege = 2,4 kg  
a téglá térfogata = 1260 cm<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \text{sűrűsége} &= \frac{2400 \text{ g}}{1260 \text{ cm}^3} \\ &= 1,9 \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

a szivacs tömege = 200 g  
a szivacs térfogata = 1260 cm<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \text{sűrűsége} &= \frac{200 \text{ g}}{1260 \text{ cm}^3} \\ &= 0,16 \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

Eredményeink összehasonlítása azt mutatja, hogy a téglá sűrűbb anyag, mint a szivacs.

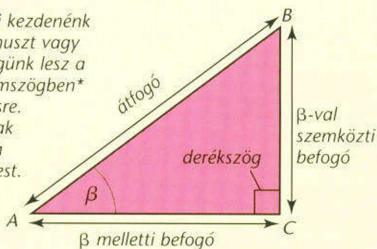




# TRIGONOMETRIA

A **trigonometria** a matematikának az az ága, amely a háromszög\* szögei\* és oldalai\* közti összefüggésekkel foglalkozik. Ezen kapcsolatok leírásához három szögfüggvényt\* kell bevezetni: **szinusz**, **koszinusz** és **tangens**, melyeket összefoglaló néven trigonometrikus vagy szögfüggvényeknek nevezünk. A trigonometriában az ismeretlen szögeket gyakran görög betűkkel jelölik, mint például  $\alpha$  (alfa) és  $\beta$  (béta).

Mielőtt használni kezdenénk a szinuszt, koszinuszt vagy tangenst, szükségünk lesz a derékszögű háromszögben\* néhány elnevezésre. Az ábra az oldalak helyzetét mutatja a  $\beta$  szöghöz képest.



## $\beta$ -val szemközti befogó

A derékszögű háromszög\* azon oldala, amely a szereplő szöggel szemben van. Az ábrán a  $\beta$ -val szemközti oldal a BC.

## $\beta$ mellett befogó

A derékszögű háromszög\* azon oldala, amely a szereplő szög mellett van. Az ábrán a  $\beta$  szög mellett befogó az AC.

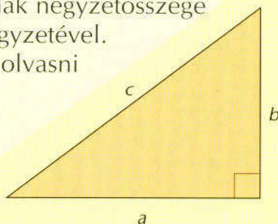
## Átfogó

A derékszögű háromszög\* leghosszabb oldala, a derékszögű csúccsal ( $90^\circ$ -os szög) szemben. Az ábrán az AB az átfogó.

## Pitagorasz-tétel

A tétel azt mondja ki, hogy egy derékszögű háromszög\* befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.

Ha bővebben akarsz olvasni a tételről, lapozz a 38. oldalra.



A Pitagorasz-tétel állítása:  
 $a^2 + b^2 = c^2$

## Ismeretlen oldalak kiszámítása

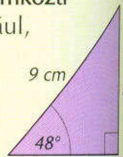
Három képlet\* segíthet egy derékszögű háromszög\* ismeretlen oldalának vagy szögének kiszámításában. Ezek a következő hányadosok:

### Szinusz (sin)

A képlet:

$$\sin \beta = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

A szinuszt akkor használjuk, ha ismerjük, vagy ismernünk kéne a szöggel **szemközti befogót** vagy az **átfogót**. Például, számítsuk ki a háromszög a oldalát, behelyettesítve az ismert adatokat a képletbe:



$$\sin \beta = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\sin 48^\circ = \frac{a}{9}$$

Átrendezve a képletet, a következő eredményt\* kapjuk:

$$a = 9 \cdot \sin 48^\circ$$

a számológép *sin* gombjának segítségével számítsuk ki  $\sin 48^\circ$  értékét, majd végezzük el a műveletet:

$$a = 9 \cdot 0,74314482$$

$$a = 6,69 \text{ cm}$$

Az a oldal hossza 6,69 cm.

## A számológép használata



A tudományos számológépekkel már tudunk szinuszt, koszinuszt és tangenst számolni, a gombokon általában *sin*, *cos*, és *tan* a rövidítés.

A legtöbb számológépen a szögfüggvények inverzét (visszakeresését) is ki tudod számolni, de ehhez a „shift” vagy „inv” gombot előre meg kell nyomni. A számológépek több funkcióban is tudnak számolni, így használat előtt győződj meg arról, hogy *DEG* módban legyen, hogy a szöveget fokban kapd meg.



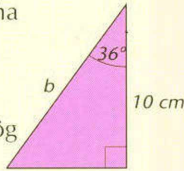
## Koszinusz (cos)

A képlet\*:

$$\cos \beta = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

A koszinuszt akkor használjuk, ha ismerjük vagy ismernünk kéne a **szög melletti befogót** vagy az **átfogót**.

Például számítsuk ki a háromszög  $b$  oldalának hosszát, behelyettesítve az ismert adatokat a képletbe:



$$\cos \beta = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{10}{b}$$

Átrendezve a képletet, a következő eredményt kapjuk:

$$b = \frac{10}{\cos 36^\circ}$$

a számológép  $\cos$  gombjának segítségével számítsuk ki  $\cos 36^\circ$  értékét, majd oldjuk meg az egyenletet:

$$b = \frac{10}{0,80901699}$$

$$b = 12,36 \text{ cm}$$

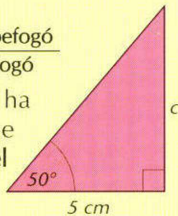
A  $b$  oldal hossza 12,36 cm.

## Tangens (tg)

A képlet\*:

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

A tangenszt akkor használjuk, ha ismerjük vagy ismernünk kéne a **szög melletti** vagy a **szöggel szemközti befogót**.



Például számítsuk ki

a háromszög  $c$  oldalának hosszát behelyettesítve az ismert adatokat a képletbe\*:

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

$$\text{tg } 50^\circ = \frac{c}{5}$$

Átrendezve a képletet, a következő eredményt kapjuk  $c$ -re:

$$c = 5 \cdot \text{tg } 50^\circ$$

A számológép  $\tan$  gombjának segítségével számítsuk ki  $\text{tg } 50^\circ$  értékét, majd oldjuk meg az egyenletet:

$$c = 1,19175359 \cdot 5$$

$$c = 5,96 \text{ cm}$$

A  $c$  oldal hossza 5,96 cm (kerekítve).

## Javaslat

Hogy könnyebben észbe tartsuk a szabályokat, érdemes a következő „értelmetlen” szavakat megtanulni:

$$\sin = \frac{\text{szög szembeni befogó}}{\text{átfogó}} = \text{szöszebe át}$$

$$\cos = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}} = \text{szömebe át}$$

$$\text{tg} = \frac{\text{szög szembeni befogó}}{\text{szög melletti befogó}} = \text{szöszebe szömebe}$$

A másik, hasonló ajánlat, hogy „kényszeresen” írjunk a kimondott szavak elé egy „szög-jelet” (◊):

◊ szebe-át

◊ mebe-át

◊ szebe-mebe

## Ismeretlen szögek kiszámítása

A **szinuszt**, **koszinuszt**, **tangens** lehetőséget nyújt a derékszögű háromszög\* ismeretlen szögeinek kiszámításához.

A számológép  $\sin^{-1}$  gombja azt adja meg, melyik az a szög, amelynek ismerjük a szinuszt.

A szinuszt inverzét **arcsin**-nak (*arkusz szinuszt*) is szokás mondani.

A számológép  $\cos^{-1}$  gombja azt adja meg, melyik az a szög, amelynek ismerjük a koszinuszt.

A koszinuszt inverzét **arccos**-nak (*arkusz koszinuszt*) is szokás mondani.

A számológép  $\tan^{-1}$  gombja azt adja meg, melyik az a szög, amelynek ismerjük a tangensét.

A tangenszt inverzét **arctg**-nak (*arkusz tangens*) is szokás mondani.

Például ha egy háromszög átfogójának és a szög melletti befogójának hosszát ismerjük, a szög a koszinusz segítségével kiszámítható.

$$\cos \beta = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

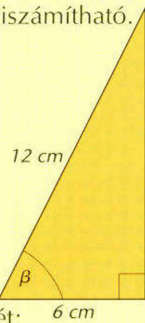
$$\cos \beta = \frac{6}{12}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{2} = 0,5$$

Rendezzük át a képletet, hogy megkapjuk a  $\beta$ -t:

$$\beta = \cos^{-1} 0,5$$

A számológép  $\cos^{-1}$  gombjának segítségével számítsuk ki  $\beta$  értékét:  $\cos^{-1} 0,5 = 60^\circ$  Tehát a  $\beta$  szög  $60^\circ$ .





## Nem derékszögű háromszögek

Ha egy háromszögben nincs derékszög\*, a szinuszra\*, koszinuszra\* és tangensre\* tanult hányadosokat nem használhatjuk az oldalak\* vagy szögek\* kiszámítására. Helyettük más összefüggéseket alkalmazhatunk, úgymint a szinusz- és a koszinusztétel.

### A szinusztétel

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Ezt átrendezhetjük úgy, hogy:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

A szinusztételt akkor alkalmazhatjuk, ha ismerjük egy háromszög egyik oldalát és két szögét, és egy másik oldalt akarunk kiszámolni. Például, adott egy háromszög egyik oldala és két szöge, a szinusztétel segítségével számoljuk ki az  $a$  oldalt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{12}{\sin 95^\circ}$$

$$\frac{a}{0,64278760} = \frac{12}{0,99619469}$$

$$a = \frac{12}{0,99619469} \cdot 0,64278760$$

$$a = 7,74 \text{ cm}$$

Az  $a$  oldal 7,74 cm (kerekítve).

A szinusztételt akkor is használhatjuk, ha két oldalt és az egyikkel szemkötti szöget ismerjük. Ebben az esetben használjuk a szinusztétel átrendezett alakját, mert így az ismeretlen szög a számlálóba\* kerül, és egyszerűbb a képletből\* megkapni az eredményt\*.

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$$

$$\frac{\sin \alpha}{10} = \frac{\sin 35^\circ}{8}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin 35^\circ}{8} \cdot 10$$

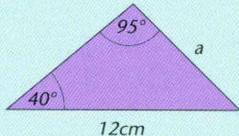
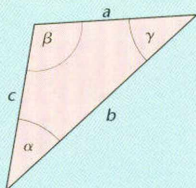
$$\sin \alpha = 0,07169705 \cdot 10$$

$$\sin \alpha = 0,7169705$$

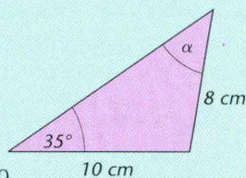
$$\alpha = \sin^{-1} 0,7169705$$

$$\alpha = 45,8^\circ$$

A keresett  $\alpha$  szög nagysága  $45,8^\circ$ .



Az eredményt\*  
az egyenlet\*  
átrendezésével  
kapjuk meg.



Az eredményt\*  
az egyenlet\*  
átrendezésével  
kapjuk meg.

### A koszinusztétel

A képlet:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

vagy más változatban:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

illetve

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ezeket átrendezve, a tételt úgy is megadhatjuk, hogy:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

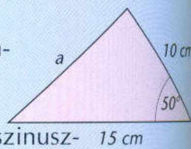
$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\text{és} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

A koszinusztételt akkor használhatjuk, ha egy háromszög két oldala és a közbezárt szögük\* adott, és keressük a harmadik oldalt.

Például ebben a háromszögben ismerünk két oldalt és az általuk

bezárt szöget, így a koszinusz- tétel segítségével megkaphatjuk az  $a$  oldalt.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = 10^2 + 15^2 - (2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 50^\circ)$$

$$a^2 = 100 + 225 - (300 \cdot 0,64278761)$$

$$a^2 = 325 - 192,836283$$

$$a^2 = 132,163717$$

$$a = 11,5$$

Vagyis az  $a$  oldal 11,5 cm (kerekítve).

A koszinusztételt akkor is alkalmazhatjuk, ha egy háromszög mindhárom oldalának hosszát ismerjük, és keressük egyik szögét. Például ebben a háromszögben ismerjük az oldalak hosszát. Ebben az esetben használjuk a koszinusztétel átalakított formáját, amelyben közvetlenül az ismeretlen szög van kifejezve.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \alpha = \frac{6^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 5}$$

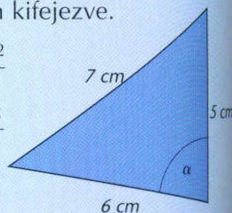
$$\cos \alpha = \frac{12}{60}$$

$$\cos \alpha = 0,2$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,2$$

$$\alpha = 78,5^\circ$$

A keresett  $\alpha$  szög  $78,5^\circ$  (kerekítve).

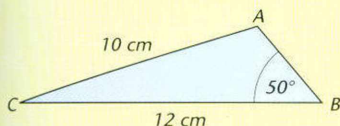
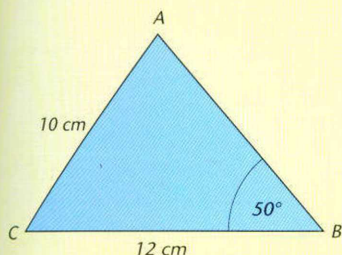




## Kétértelmű esetek

Ha ismerjük egy háromszög két oldalát és egyik szögét, de ez nem a közbezárt szög\*, két lehetséges megoldásunk is lesz. Ezt hívjuk **kétértelmű esetnek**. (Hogy hogyan szerkeszt-hetjük meg a két különböző esetet, megtalálod a 49. oldalon.)

Például, a háromszög a oldala legyen 12 cm, a b oldal 10 cm és a szög  $50^\circ$  – nézzük, hogy lehetséges ez:



A szög teljesen más a két háromszögben. Írjuk fel a szinusztételt -ra:

$$\frac{\sin \alpha}{12} = \frac{\sin 50^\circ}{10}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin 50^\circ}{10} \cdot 12$$

$$\sin \alpha = 0,919\,253\,33$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0,919\,253\,33$$

$$= 66,8^\circ$$

Ez az eredmény helyes az első háromszög esetén. Ahhoz, hogy a tompaszögű megoldást is megkapjuk, vonjuk ki az előbb kapott értéket  $180^\circ$ -ból:

$$180^\circ - 66,8^\circ = 113,2^\circ$$

Tehát lehetséges értékei  $66,8^\circ$  és  $113,2^\circ$

A szinuszfüggvény\* segítségével ellenőrizhetjük, hogy mindkét megoldás helyes. Ha csak egy megoldásra van szükséged, mindig a kisebb számot add meg (a számológép is automatikusan ezt írja ki)!

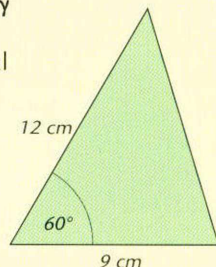
## A háromszög területe

Ha trigonometriával foglalkozunk, a háromszög területét\* a következő képlet\* segítségével számíthatjuk ki:

$$\text{terület} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

ahol  $\gamma$  az  $a$  és  $b$  oldal által bezárt szög\*.

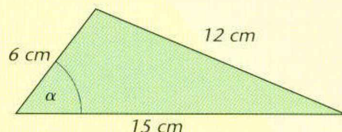
Például ebben a háromszögben ismerünk két oldalt és a közbezárt szöget, így a területet kiszámíthatjuk:



$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \cdot 0,866\,025\,40 = 46,8 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Ha nem ismerjük az oldalak hosszát vagy az általuk bezárt szöget, akkor a területszámítás előtt ezeket az adatokat a **szinusz-** vagy **koszinusztétel** segítségével ki kell számolni.

Például, a lenti háromszög oldalai 6 cm, 12 cm és 15 cm.



A terület kiszámításához először számoljuk ki az  $\alpha$  szög nagyságát. Mivel mind a három oldalt ismerjük, használjuk a koszinusztételt:

$$\cos \alpha = \frac{15^2 + 6^2 - 12^2}{(2 \cdot 15 \cdot 6)}$$

$$\cos \alpha = \frac{117}{180}$$

$$\cos \alpha = 0,65$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,65$$

$$= 49,458\,398\,13 = 49,5^\circ$$

Most már számítható a háromszög területe:

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 \cdot \sin 49,458\,398\,13$$

(Használjuk a kerekítés nélküli értéket, így a végeredmény pontosabb lesz!)

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 \cdot 0,759\,934\,21 = 68,4 \text{ cm}^2$$

Tehát a háromszög területe  $68,4 \text{ cm}^2$ .





# A trigonometrikus vagy szögfüggvények grafikonjai

## A szinuszfüggvény vagy szinuszgörbe

A szinusz\* függvény grafikonját\*  $\beta$  függvényeként ábrázoljuk. Ez olyan görbét ad, melyet **szinuszhullámnak** nevezünk. A függvény pontjai  $360^\circ$ -onként ismétlődnek: ezt úgy mondjuk, hogy a függvény **periódusa**  $360^\circ$ . A grafikon segíthet megkeresni  $\sin x$  értékét, ahol  $x$  egy tetszőleges szög\*.

Pl.: ahol  $x = 90^\circ$ ,  $y = 1$ ,  
tehát  $\sin 90^\circ = 1$ .

## A koszinuszfüggvény vagy koszinuszgörbe

A koszinusz\* függvény grafikonját\*  $\beta$  függvényeként ábrázoljuk. A függvény pontjai  $360^\circ$ -onként ismétlődnek: ezt úgy mondjuk, hogy a függvény **periódusa**  $360^\circ$ . A koszinuszfüggvény nagyon hasonlít a **szinuszhullámhoz**, csak az  $x$  tengely mentén más a helyzete. A grafikon segíthet megkeresni  $\cos x$  értékét, ahol  $x$  egy tetszőleges szög\*.

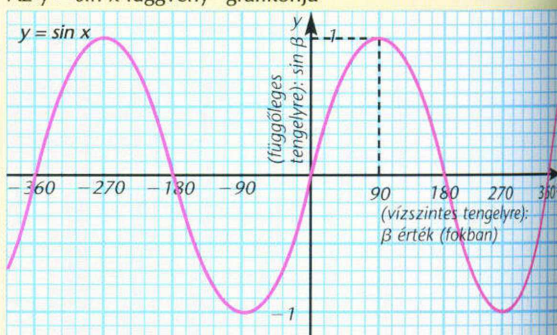
Pl.: ahol  $x = 180^\circ$ ,  $y = -1$ ,  
tehát  $\cos 180^\circ = -1$ .

## A tangensfüggvény vagy tangensgörbe

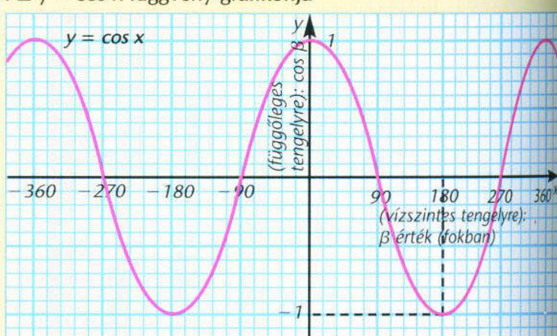
A tangens\* függvény grafikonját\*  $\beta$  függvényeként ábrázoljuk. Ez nem folytonos függvény (szakadása van). A függvény pontjai  $180^\circ$ -onként ismétlődnek: ezt úgy mondjuk, hogy a függvény **periódusa**  $180^\circ$ . A függvény grafikonja ott szakad meg, ahol  $\tan$  nem értelmezhető. (A számológép  $\tan 90^\circ$ -ra error-t ír ki.) Ezeket a helyeket **szakadási helyeknek** mondjuk. A grafikon segíthet megkeresni  $\tan x$  értékét, ahol  $x$  egy tetszőleges szög\*.

Pl.: ahol  $x = 45^\circ$ ,  $y = 1$ , tehát  $\tan 45^\circ = 1$ .

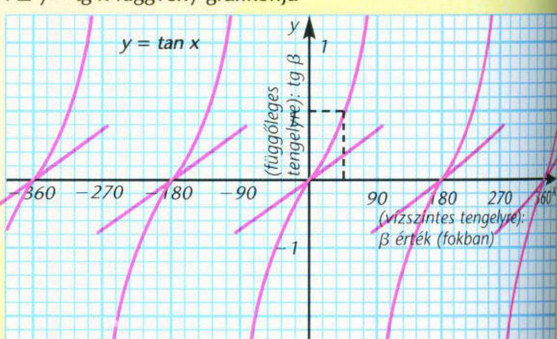
Az  $y = \sin x$  függvény\* grafikonja



Az  $y = \cos x$  függvény grafikonja

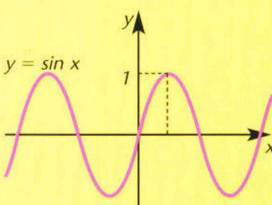


Az  $y = \tan x$  függvény grafikonja

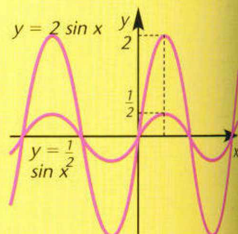


## A grafikonok változása

A **szinusz- és koszinuszgrafikonok** változását\* az okozhatja, ha a függvény valamilyen csekély mértékben megváltozik. Az  $y = \sin x$  grafikonjának alakja megváltozhat  $y = a \sin x$  és az  $y = \cos x$  alakja is változik  $y = a \cos x$  esetén (ahol  $a$  egy nullától különböző valós szám). Ezek a változások a függvény „magasságát”, más néven a függvény **amplitúdóját** módosítják.



Az  $y = \sin x$  függvény maximális értéke 1.



Az  $y = 2 \sin x$  függvény maximális értéke 2. Az  $y = \frac{1}{2} \sin x$  függvény maximális értéke pedig  $\frac{1}{2}$ , és így tovább.



# KÖRÖK

A kör olyan síkbeli zárt görbe, amelynek minden pontja egyenlő távolságra van egy adott ponttól, amelyet a kör **középpontjának** nevezünk. A kört körző\* segítségével rajzolhatjuk meg. A körnek vannak bizonyos jellemzői, melyek segítségével kiszámíthatjuk **kerületét** és **területét\***, illetve egy henger\*, kúp\* vagy gömb\* térfogatát.



A körvonal minden pontja egyenlő távolságra van a középponttól.

## A kör részei

### A körvonal

A kör kerületének teljes hossza.

körvonal



### A körív

A körvonal egy része. Ha a körvonalat két nem egyenlő részre osztjuk, egy **hosszabb** és egy **rövidebb ívet** kapunk.

rövidebb ív

hosszabb ív



### Félkörív

Olyan körív, amely épp a körvonal fele.

félkör

félkör



### Negyedkörív

Olyan ív, amely a teljes körvonal negyedrésze.

negyed körív



### Sugár

Bármely szakasz, amely a kör **középpontját** és **kerületének** egy pontját köti össze. A sugár az **átmérő** fele.

sugár



### Átmérő

Olyan szakasz, mely a körvonal két pontját köti össze, és áthalad a **középponton**. Az átmérő a **sugár** kétszerese.

átmérő



### Körcikk

A körnek az a része, melyet egy **körív** és két **sugár** határol. Beszélhetünk egy kör **kisebbik** és **nagyobbik** körcikkéről.

kisebbik körcikk

nagyobbik körcikk



félkörív

félkörlap

átmérő



### Félkörlap

Egy kör fele, melyet egy **átmérő** és egy **félkörív** határol.

### Negyed körlap

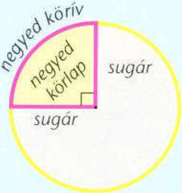
Egy kör negyed része, melyet két, egymásra merőleges (90°) **sugár** és egy **negyed körív** határol.

negyed körív

negyed körlap

sugár

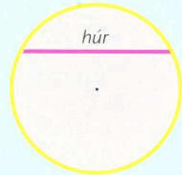
sugár



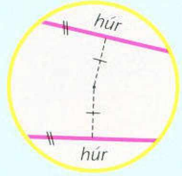
### Húr

Egy szakasz a kör kerületének két pontja között. Az azonos hosszúságú húrok **egyenlő** távolságra vannak a kör **középpontjától**. Ez egyben azt is jelenti, hogy ha két húr egyenlő távolságra van a kör középpontjától, akkor a két húr egyenlő hosszú.

húr



húr



húr

### Kör szelet

A kört egy **húrja** két körszeletre osztja; beszélhetünk a **kisebbik**, illetve a **nagyobbik szeletről**.

kisebbik szelet

nagyobbik szelet





## SZÁMÍTÁSOK A KÖRÖN BELÜL

Pi ( $\pi$ )

A Pi valójában arány\*: a kör területének\* és átmérőjének\* hányadosa. Más szavakkal: a kör megkerüléséhez szükséges távolságot osztjuk az átszelésekor megtett távolsággal. A Pi irracionális szám\*, melynek több trillió tizedesjegyét kiszámították már, de a közelítő értéke 3,142 (3 tizedesjegyre) vagy  $\frac{22}{7}$ . Görög betűvel szimbolizáljuk:  $\pi$ . Pi-t használjuk a körök területének és kerületének kiszámításakor, illetve a hengerek, kúpok\* vagy gömbök\* térfogatának meghatározásakor.



Ezt a gombot használd a számológépeden, ha a Pi értékével akarsz számolni.

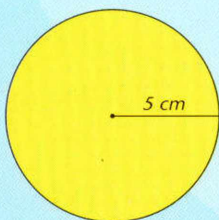
A számológépek a Pi értékét több tizedes pontossággal is kiírják, pl.: 3,141592654, ami sokkal pontosabb számításokat tesz lehetővé (a kiírt számjegyek száma számológéptől függ).

## A kör kerülete

Szorozzuk meg a kör átmérőjét  $\pi$ -vel. A kerület-számítás képlete:

$$\text{Kerület} = \pi d \text{ vagy } 2\pi r$$

Ahol  $r$  a kör sugara,  $d$  az átmérője.



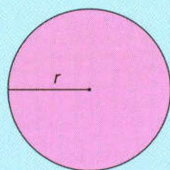
Ennek a körnek a kerülete:  
 $2 \cdot \pi \cdot 5$   
 $= 2 \cdot 3,142 \cdot 5$   
 $= 31,42 \text{ cm}$

Ha a kör kerülete ismert, kiszámíthatjuk sugarának vagy átmérőjének hosszát a következő képlet segítségével:

$$r = \frac{\text{kerület}}{2\pi}$$

Például ennek a körnek a kerülete 26 cm, sugara:

$$\begin{aligned} & \frac{26}{2 \cdot \pi} \\ &= \frac{26}{6,283...} \\ &= 4,14 \text{ cm} \end{aligned}$$



$K = 26 \text{ cm}$

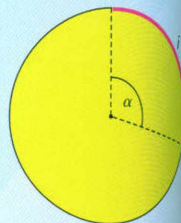
## A körív hossza

A körív mindkét végpontját kössük össze a kör középpontjával, és mérjük meg az általuk bezárt szöget. A körív hossza úgy aránylik a kör teljes kerületéhez\*, ahogy a középponti szög a teljes szöghöz (360°). (Egy teljes kör megtételéhez tartozó középponti szög.)

$$\frac{i}{K} = \frac{\alpha}{360}$$

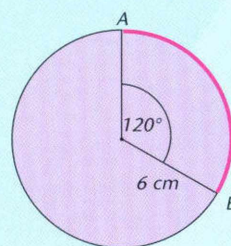
ahol  $i$  a körív hossza,  $K$  a kör kerülete és  $\alpha$  a középponti szög. Ez azt jelenti:

$$i = \frac{\alpha}{360} \cdot K$$



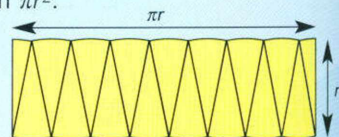
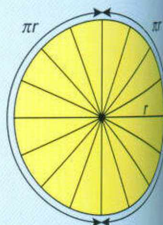
Például az AB körív kiszámítása:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{360} \cdot K \\ &= \frac{120}{360} \cdot 2\pi r \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6 \\ &= 12,6 \text{ cm} \end{aligned}$$



## A kör területe

A körnek van egy sugara\* ( $r$ ) és egy kerülete\* ( $2\pi r$ ). Ha felszeleteljük a kört, és a lenti ábra alapján összeillesztjük a körcikkeket, akkor téglalapszerű alakzatot kapunk, melynek területe az  $\pi r \cdot r$  képlet alapján  $\pi r^2$ .

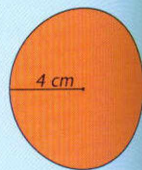


Így a következőkben a kör területét ennek a képletnek a segítségével számítjuk:

$$\text{terület} = \pi r^2$$

Például ennek a körnek a területe:

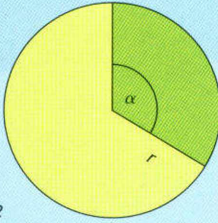
$$\begin{aligned} & \pi \cdot 4^2 \\ &= \pi \cdot 16 \\ &= 50,3 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$





**Körcikk területe**

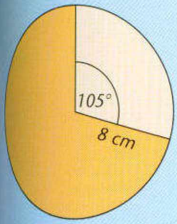
A körcikk\* területe úgy aránylik a kör területéhez, ahogy a középponti szöge a teljes szöghöz ( $360^\circ$ ).



$$\text{körcikk területe} = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2$$

ahol a középponti szög.

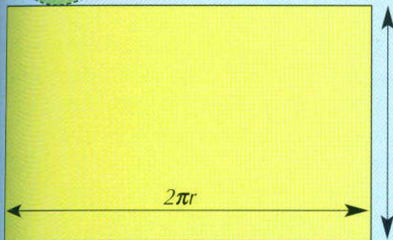
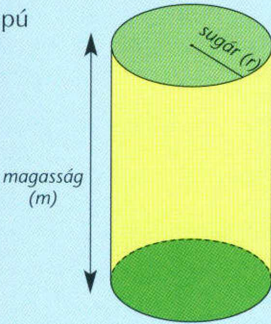
Például a jelölt körcikk területe:



$$\begin{aligned} & \frac{105}{360} \cdot \pi r^2 \\ &= \frac{105}{360} \cdot \pi \cdot 8^2 \\ &= \frac{105}{360} \cdot \pi \cdot 64 \\ &= 58,6 \text{ cm}^2 \text{ (kerekítve)} \end{aligned}$$

**Henger**

A henger egy kör alapú hasáb\*. A henger hálóját\* azt mutatja, hogy a felszíne\* egy téglalapból\* és két körből áll.



A téglalap szélessége a henger magassága, a hosszúsága pedig a henger alapkörének kerülete\*.

**A henger palástja**

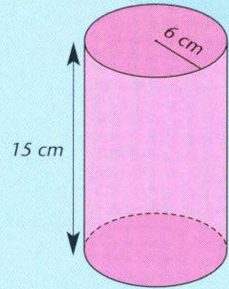
A téglalap hosszúsága megegyezik a kör kerületével\*, így a palást területe:

$$\text{terület} = 2\pi r \cdot m \text{ vagy } 2\pi r m$$

ahol megközelítőleg 3,142.

Például a hasáb palástja:

$$2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 15 = 565 \text{ cm}^2$$

**A henger felszíne**

Adjuk össze a henger palástját\* alkotó téglalap területét és a két alapkör területét. (A kör területének kiszámításához használd a  $\pi r^2$  képletet!\*)

Például a henger felszínének\* kiszámítása a következő:

palást területe:

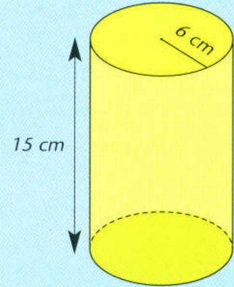
$$\begin{aligned} & 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 15 \\ &= 565,486 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

a körök területe:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \pi \cdot 6^2 \\ &= 226,194 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

a henger felszíne:

$$\begin{aligned} & 565,486 + 226,194 \\ &= 791,68 \\ &= 792 \text{ cm}^2 \text{ (kerekítve)} \end{aligned}$$

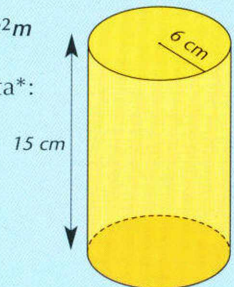
**A henger térfogata**

Szorozzuk meg az alapkör területét\* a henger magasságával:

$$\text{térfogat} = \pi r^2 \cdot m \text{ vagy } \pi r^2 m$$

Például, a henger térfogata\*:

$$\begin{aligned} & \pi \cdot 6^2 \cdot 15 \\ &= \pi \cdot 36 \cdot 15 \\ &= 1696 \text{ cm}^3 \text{ (kerekítve)} \end{aligned}$$

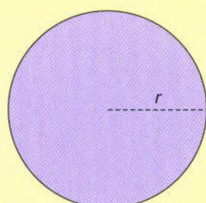




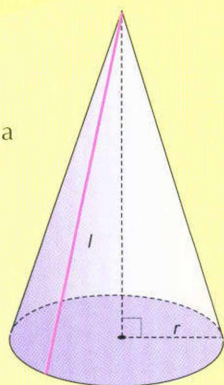
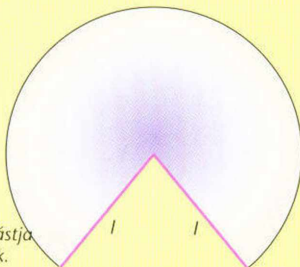
## Kúpok

A kúp olyan gúla\*, melynek az alapja kör. Ha felvágnánk a jobb oldali kúpot a rózsaszín vonal mentén (neve alkotó), és kiterítenénk, azt tapasztalnánk, hogy a palástja\* körcikk\* alakú.

A kúp alapja egy  $r$  sugarú\* kör.



A kúp kiterített palástja egy  $l$  sugarú körcikk.



### A kúp palástja

A körcikk ívhossza  $2r$ , mivel az épp a kúp alapkörének kerületével egyenlő (kisebb kör). A nagyobb kör sugara\* (melynek része a palást) a kúp alkotója ( $a$ ), így annak kerülete  $2a$ . A körcikk ívhossza úgy aránylik a nagyobb kör kerületéhez, mint  $\frac{2r\pi}{2a\pi}$ , melyet

egyszerűsítve az  $\frac{r}{a}$  arányt kapjuk. A körcikk

területét úgy kapjuk meg, ha a kör területét megszorozzuk ezzel az aránnyal.

A körcikk területének kiszámítása:

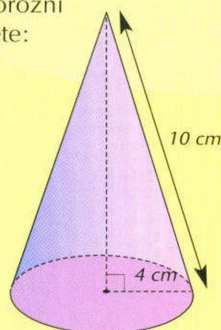
$$\frac{r}{a} \cdot a^2 \pi = \frac{r \cdot a^2 \pi}{a} = ar\pi$$

ami tulajdonképpen azt jelenti, hogy az alapkör sugarának és a kúp alkotójának szorzatát még meg kell szorozni  $\pi$ -vel. Tehát a palást területe:

$$\text{palást} = ar\pi$$

Például ennek a kúpnak a palástja:

$$\begin{aligned} \pi \cdot 4 \cdot 10 \\ = \pi \cdot 40 \\ = 126 \text{ cm}^2 \text{ (kerekítve)} \end{aligned}$$



### A kúp felszíne

Adjuk össze az alapkör területét\* és a palástot. A kör területének kiszámítására az  $\pi r^2$ , a palástra a  $\pi ar$  képletet használjuk, ahol  $r$  az alapkör sugara,  $a$  a kúp alkotója.

Például, az előző kúp felszínének kiszámítása: Palást:

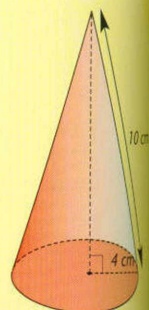
$$\begin{aligned} \pi \cdot 4 \cdot 10 \\ = 125,66 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

a kör területe:

$$\begin{aligned} \pi \cdot 16 \\ = 50,26 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

a teljes felszín

$$\begin{aligned} 125,66 + 50,26 \\ = 176 \text{ cm}^2 \text{ (kerekítve)} \end{aligned}$$



### A kúp térfogata

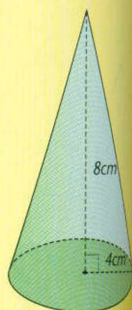
Egy gúla\* térfogata\* harmadakkora, mint a vele azonos alapterületű és azonos magasságú hasáb\* térfogata. Ezért a kúp térfogata is harmadakkora, mint a vele azonos alapterületű és azonos magasságú\* henger térfogata, így a kúp térfogata:

$$\text{térfogat} = \frac{1}{3} \pi r^2 m$$

ahol  $m$  a magasság.

Például ennek a kúpnek a térfogata:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8 \\ = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot 8 \\ = 134 \text{ cm}^3 \text{ (kerekítve)} \end{aligned}$$

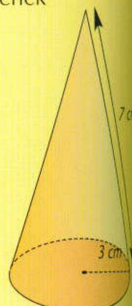


Ha a sugár és az alkotó adott, akkor a magasságot a Pitagorasz-tétel\* segítségével tudjuk kiszámítani. Például, számítsuk ki a kúp magasságát, ha alapkörének sugara 3 cm, alkotója 7 cm:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ a^2 + 3^2 &= 7^2 \\ a^2 + 9 &= 49 \\ a^2 &= 40 \\ a &= 6,32455532 \end{aligned}$$

Tehát a kúp térfogata:

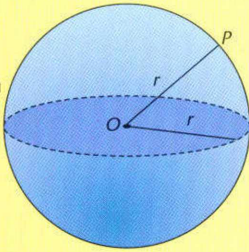
$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 6,32455532 \\ = 59,6 \text{ cm}^3 \text{ (kerekítve)} \end{aligned}$$





## Gömbök

A **gömb** egy tökéletesen kerek test. A gömb felszínének minden pontja egyenlő távolságra van a gömb középpontjától.



A gömbön bármely P pont egyenlő távolságra van a középponttól (O). Ez a távolság a gömb sugara ( $r$ ).

### A gömb felszíne

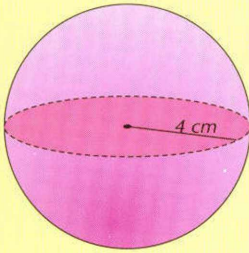
Szorozzuk meg az  $r$  sugarú\* kör területét\* 4-gyel.

$$\text{felszín} = 4\pi r^2$$

ahol  $r$  a sugár.

Például, ennek a gömbnek a felszíne\*:

$$\begin{aligned} &4 \cdot \pi \cdot 4^2 \\ &= 4 \cdot \pi \cdot 16 \\ &= 201 \text{ cm}^2 \text{ (kerekítve)} \end{aligned}$$



### A gömb térfogata

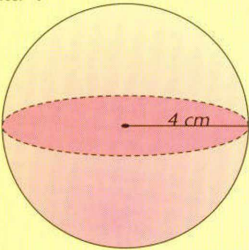
Használjuk a következő képletet:

$$\text{Térfogat} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

ahol  $r$  a gömb főkörének\* sugara.

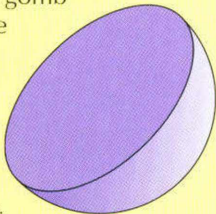
Például, a gömb térfogata\*:

$$\begin{aligned} &\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 64 \\ &= 268 \text{ cm}^3 \text{ (kerekítve)} \end{aligned}$$



### Félgömb

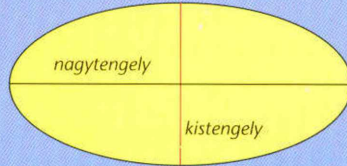
Egy **gömbnek** a fele. A félgömb térfogata\* fele a vele azonos sugarú\* gömb térfogatának, a felszíne fele a gömb felszínének plusz hozzá kell adni a gömb főkörének területét\*.



A félgömb egy gömb fele.

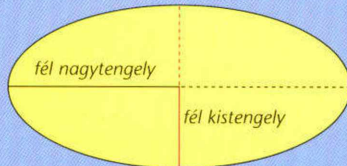
## Ellipszis

Az **ellipszis** zárt, szimmetrikus\* görbe olyan, mint egy összenyomott vagy kinyújtott kör. Bármely húrja\*, mely átmegy a középpontján, az ellipszis átmérője\*. Két olyan átmérője van, amely egyben szimmetriatengely\* is. A hosszabbik átmérőt **nagytengety**nek, a kisebbik átmérőt **kistengely**nek hívjuk.



Az ellipszisnek két szimmetriatengelye van, a nagytengety és a kistengely.

Annak a szakasznak\* a hosszát, mely a középponttól a nagytengety végpontjáig tart, az ellipszis **fél nagytengetyének** mondjuk, a középponttól a kistengely végpontjáig tartó szakasz hosszát pedig **fél kistengelynek** mondjuk. Ezek segítségével tudjuk az ellipszis területét\* kiszámítani:



A féltengelyekre az ellipszis területének kiszámításához van szükségünk.

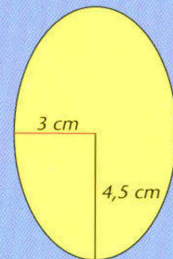
Az ellipszis területének kiszámítása:

$$\text{Terület} = \pi ab$$

Ahol  $a$  a fél nagytengety,  $b$  a fél kistengely hossza.

Például, az ellipszis területe:

$$\begin{aligned} &\pi \cdot 4,5 \cdot 3 \\ &= 42,4 \text{ cm}^2 \text{ (kerekítve)} \end{aligned}$$





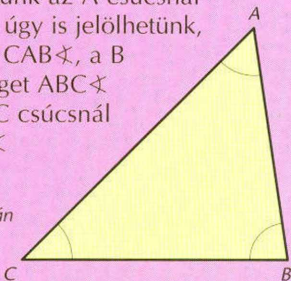
# SZÖGEK A KÖRBEN

Mivel a körnek nincsenek csúcsai\*, így szögei sem lehetnek. Azonban a kör bizonyos pontjaiból kiinduló szögeknek nagyon jellegzetes tulajdonságaik vannak.

## Szögek elnevezése

Egy szöget elnevezhetünk a szárai\* találkozási pontja segítségével. Például egy háromszögnél beszélhetünk az A csúcsnál\* lévő szögről, amit úgy is jelölhetünk, hogy  $\angle BAC$  vagy  $\angle CAB$ , a B csúcsnál lévő szöget  $\angle ABC$  vagy  $\angle CBA$  és a C csúcsnál lévő szöget  $\angle ACB$  vagy  $\angle BCA$ .

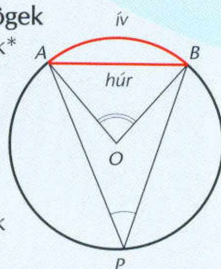
(Ezeket a jelöléseket ritkán használjuk, leggyakrabban görög betűkkel jelöljük őket:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .)



## Kerületi és középponti szögek

Ha egy kör egyik húrjának\* vagy ívének\* végpontjait összekötjük a kör középpontjával, a keletkező szöget **középponti szögnek** nevezzük.

Ha egy kör egyik húrjának vagy ívének végpontjait összekötjük a kör kerületének valamely pontjával, a keletkező szöget **kerületi szögnek** nevezzük.

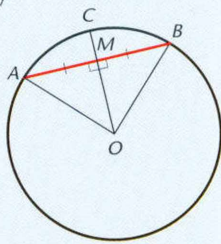


$\angle APB$  az AB húrhoz vagy AB ívhez tartozó kerületi szög.

## A húr felezőmerőlegese

Olyan egyenes, mely átmegy a húr felezőpontján\*, és merőleges\* a húrra\*. A húr felezőmerőlegese mindig átmegy a kör középpontján (O).

Az a sugár\*, mely átmegy egy húr felezőpontján, merőleges ( $90^\circ$ ) a húrra. Ha összekötjük az O és A, illetve az O és B pontokat, a felezőmerőleges két egybevágó\* derékszögű háromszöget\* hoz létre.



Az OC felezőmerőleges M pontban metszi az AB húrt. Az  $\angle OMA$  és az  $\angle OMB$  mindegyike derékszög.

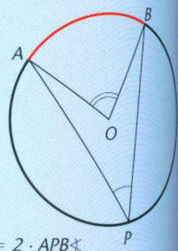
## A szögek tulajdonságai

Az alább felsorolt tulajdonságok mindegyike a **kerületi** és **középponti szögek**re vonatkozik.

### Kerületi és középponti szögek kapcsolata

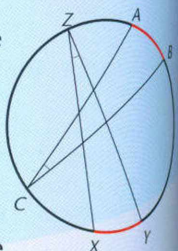
Ugyanazon húrhoz\* vagy ívhez\* tartozó középponti szög mindig kétszer akkora, mint a hozzá tartozó kerületi szög\*.

$$\angle AOB = 2 \cdot \angle APB$$



### Kerületi szögek

Egyenlő húrhoz\*, illetve ívekhez\* egyenlő kerületi szögek\* tartoznak.



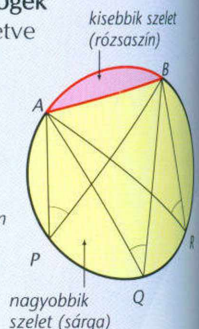
Ha  $XY$  ív =  $AB$  ív, akkor  $\angle XZY = \angle ACB$

### Ugyanazon húrhoz, illetve ívhez tartozó kerületi szögek

Ugyanazon húrhoz\*, illetve ívhez\* tartozó **kerületi szögek** egyenlők, ha ugyanazon körszeletbe\* esnek.

Ez az ábra azt mutatja, hogy az  $\angle APB$ ,  $\angle AQB$  és  $\angle ARB$  ugyanazon húrhoz tartozó kerületi szögek, és mindegyikük a nagyobbik körszeletben van.

$$\angle APB = \angle AQB = \angle ARB$$



nagyobbik szelet (sárga)

### Egy félkör szögei

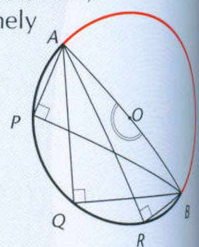
Azok a **középponti szögek**, amelyekhez tartozó körív félkör\*,  $180^\circ$ -osak.

Ebből az is következik, hogy a hozzájuk tartozó **kerületi szögek**  $90^\circ$ -osak, mivel a középponti szöget kell megfelelni. (lásd fent).

Ez azt jelenti, hogy bármely átmérő\* két végpontját összekötve a kerület egy másik pontjával, derékszöget\* kapunk. (Ez **Thalesz tétele**)

$$\angle AOB = 180^\circ$$

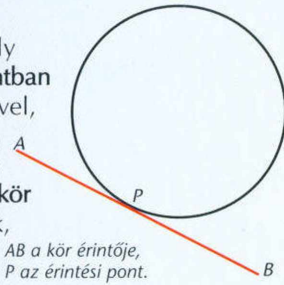
$$\angle APB = \angle AQB = \angle ARB = 90^\circ$$





## Érintők

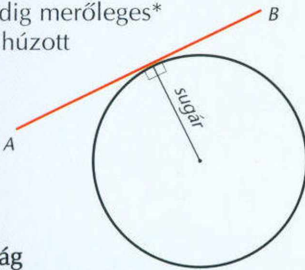
Azt az egyenest, mely egyetlen **érintési pontban** találkozik egy görbével, **érintőnek** nevezzük. Amikor egy egyenes érint egy kört, azt a **kör érintőjének** mondjuk, és fontos tulajdonságokkal rendelkezik.



## Első tulajdonság

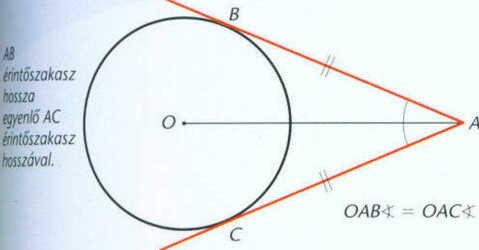
A kör érintője mindig merőleges\* az **érintési pontba** húzott sugárra\*.

A derékszög\* ott keletkezik, ahol az érintő és a sugár találkozik.



## Második tulajdonság

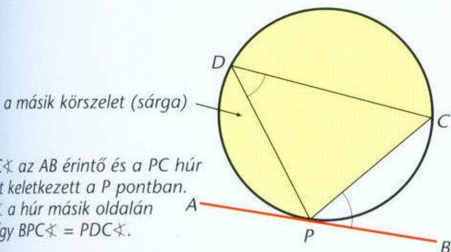
A körhöz egy külső pontból húzott **érintőszakaszok** hossza egyenlő.



A fenti ábra azt is megmutatja, hogy AC szögfelezője a  $\angle BAC$ -nek, így  $\angle BAO$  és  $\angle OAC$  egyenlő.

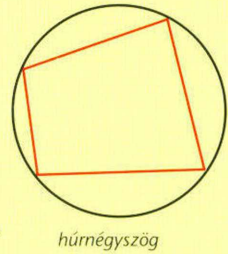
## Érintő szárú kerületi szög

Olyan szög, amelynek szárai egy **érintő** és az **érintési pontból** induló húr\*. Ez a szög egyenlő a húr másik oldalán lévő kórszeletben fekvő **kerületi szögekkel**.



## Húrnégyszögek

Olyan négyszög\*, melynek minden csúcsa\* ugyanazon kör kerületén\* van. A **húrnégyszögek** szögeinek fontos tulajdonságaik vannak.



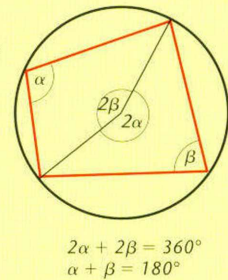
## A húrnégyszögek első tulajdonsága

A húrnégyszög szemközti szögei kiegészítő szögek, vagyis összegük  $180^\circ$ .

Egy kör **középponti szöge** mindig kétszer akkora, mint az ugyanazon húrhoz\* tartozó **kerületi szög** (lásd középponti szögek, 70. oldal).

Ez azt jelenti, hogy a lenti ábrán a középponti szögeket jelölhetjük  $2\alpha$ -val és  $2\beta$ -val.

$2\alpha$  és  $2\beta$  szög összege  $360^\circ$ , mivel együtt egy teljes szöget\* tesznek ki, így  $\alpha$  és  $\beta$  szögek, amelyek fele akkorák,  $180^\circ$ -ra egészítik ki egymást.



## A húrnégyszögek második tulajdonsága

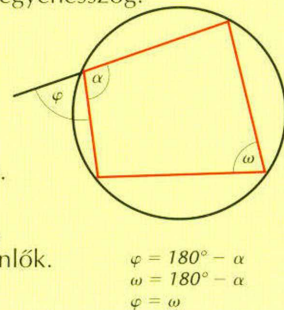
Egy külső szög mindig egyenlő a szemközti belső szöggel.

Az ábra alapján:

A  $\alpha$  szög  $180^\circ - \alpha$  szöggel egyenlő, mivel a két szög együtt egyenesszög.

$\omega$  szög egyenlő  $180^\circ - \alpha$ -val, mivel egy húrnégyszögben szemközti szögek.

Ebből következik, hogy  $\varphi$  és  $\omega$  egyenlők.





# MÉRTÉKEGYSÉGEK

A mindennapi életben szükségünk van tárgyak, mennyiségek mértékének meghatározására, és hogy pontosan megosszuk ezeket az információkat másokkal. Hogy biztosak lehessünk abban, hogy mindenki ugyanazt a mennyiséget érti, egységes mértékegységeket szükséges használni. Két elterjedt mértékegység rendszer van: a „birodalmi” és a metrikus.

## A „birodalmi” rendszer

Ezt e rendszert leginkább Angliában használják, de több, angol anyanyelvű országban is honos, ideértve az USA-t is. Néhány országban ezt a mértékrendszert már részben vagy teljesen felváltotta a metrikus rendszer.

## A metrikus rendszer

Tízes alapú mértékegységrendszer\*, a világ legtöbb országában ezt használják. A metrikus számítások a tízeseken, százason, ezreseken alapulnak, mert ez sokkal egyértelműbb, könnyebb.

## Hosszúság

Két pont közötti távolság.

## Tömeg

Annak az anyagnak a mennyisége, amiből egy tárgy készült. A tömeg nem ugyanaz, mint a **súly**, mely az a gravitációs erő, ami a tárgyra hat. A súly változhat, például ugyanannak a testnek a súlya a Holdon kisebb, mint a Földön (a Holdon kisebb a gravitáció), de a tömegük mindenhol ugyanakkora.

## Térfogat

Egy tárgy vagy tartály befogadó-képessége.

## „Birodalmi” mértékegységek

Hosszúság egységek	Rövidítés	egyenlő
Hüvelyk	"	
Láb		12 hüvelyk
Yard	yd	3 láb
Mérföld		1760 yard
Tömegegységek	Rövidítés	egyenlő
Uncia	oz	
Font	lb	16 uncia
Stone	st	14 font
Hundredweight	cwt	8 stone
Tonna		20 hundredweight
Térfogategységek	Rövidítés	egyenlő
Folyékony uncia	fl.oz	
Pint	pt	20 folyékony uncia
Gallon	gal	8 pint

## Metrikus egységek

Hosszúságegységek	Rövidítés	egyenlő
Milliméter	mm	
Centiméter	cm	10 milliméter
Méter	m	100 centiméter
Kilométer	km	1000 méter
Tömegegységek	Rövidítés	egyenlő
Milligramm	mg	
Gramm	g	1000 milligramm
Kilogramm	kg	1000 gramm
Tonna	t	1000 kilogramm
Űrmértékegységek	Rövidítés	egyenlő
Milliliter	ml	
Centiliter	cl	100 milliliter
Liter	l	1000 milliliter

„Birodalmi” egységek	Metrikus egységek
1 láb	≈ 30 centiméter
5 mérföld	≈ 8 kilométer
2,2 font	≈ 1 kilogramm
1,75 pint	≈ 1 liter
1 gallon	≈ 4,5 liter
(≈ azt jelenti, hogy „megközelítőleg egyenlő”)	



## A mozgás mértékegységei

### Sebesség

Időegység alatt történő elmozdulás. A sebességet megadhatjuk kilométer / óra (km/h) vagy méter / szekundum (m/s) egységekben. A sebesség képlete\*:

$$\text{sebesség} = \frac{\text{távolság}}{\text{idő}}$$

Például, ha egy autó a 180 km-es utat egyenletes sebességgel 3 óra alatt tesz meg, akkor sebessége 60 km/h ( $\frac{180}{3}$ ).

Ha az autó az első órában 70 km-t tesz meg, a következő két órában pedig 55 km-t halad óránként, akkor ugyanúgy 180 km-t tesz meg ugyanannyi idő alatt (3 óra), mintha végig 60 km/h lett volna a sebessége. Az összesen megtett út és az eltelt idő hányadosát **átlagsebességnek** hívjuk.

Az átlagsebesség kiszámításának képlete:

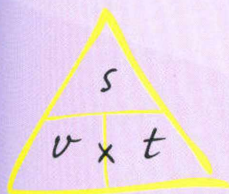
$$\text{átlagsebesség} = \frac{\text{összes út}}{\text{összes idő}}$$

A sebességre adott képlet használható akár távolság, akár idő számítására is.

$$\text{távolság} = \text{sebesség} \cdot \text{idő}$$

$$\text{idő} = \frac{\text{távolság}}{\text{sebesség}}$$

A lenti háromszög-elrendezés segíthet a képlet felidézésében. A háromszögben  $s$  a megtett út,  $v$  a sebesség és  $t$  az eltelt idő.



Ha a képlet segítségével akarunk távolságot számolni, takarjuk le a rácsban  $s - t$ , és marad a képlet:  $v \cdot t$ .

Ha a sebességet keressük, takarjuk le  $v - t$ , és marad a képlet:  $s : t$ .

Ha az időt keressük, takarjuk le  $t - t$ , és marad a képlet:  $s : v$ .

### Összetett mennyiség

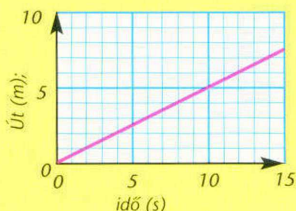
Olyan mértékegység, amely egynél többféle egységet tartalmaz. Például a sebesség összetett (származtatott) mennyiség, hiszen a távolság és az idő egységeiből tevődik össze. Egy másik ilyen származtatott mennyiség a sűrűség, ami a tömeg és térfogat egységeiből áll.

(A sűrűségről az 59. oldalon olvashatsz bővebben.)

### Út-idő-grafikon

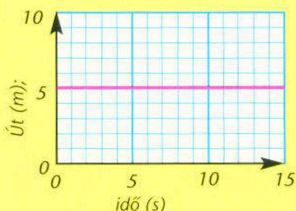
A grafikon\* mutatja a **sebességet**, pontról pontra ábrázolva a megtett utat az idő függvényében.

Az egyenletes mozgás sebességének képe egy út-idő-grafikonon: origón átmenő egyenes.



Ez a grafikon azt mutatja, hogy az egyenletesen mozgó test sebessége 0,5 m/s (összes út/összes idő).

Az út-idő-grafikonon a vízszintes\* egyenes egy álló testet jelez.



Ez a grafikon azt mutatja, hogy a testnek nincs sebessége, vagyis nem mozog.

### Pillanatnyi sebesség

Adott idő alatti elmozdulás mértéke. A pillanatnyi sebesség vektor\*mennyiség. A **sebességhez** hasonlóan, a mértékegysége km/h vagy m/s. Fontos, hogy mindig meg kell adni a mozgás irányát. Például, egy kisrepülőgép pillanatnyi sebessége lehet 110 km/h 50°-os irányban\*.

### Gyorsulás

A **sebességváltozás** mértéke. A gyorsulás vektor\*mennyiség. A mértékegysége méter / szekundum négyzet, röviden m/s<sup>2</sup>. A gyorsulás kiszámításának képlete:

$$\text{gyorsulás} = \frac{\text{sebességváltozás}}{\text{idő}}$$

Például, ha egy vonat 6 m/s-os sebességről 3 s alatt gyorsul fel 12 m/s-os sebességre, akkor a gyorsulása:

$$\frac{12 - 6}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ m/s}^2$$

Tehát a vonat gyorsulása az elmozdulás irányában: 2 m/s<sup>2</sup>.

### Lassulás

Negatív gyorsulás, amikor a test egyre lassabban halad.





# IDŐ

Egy nap az az idő, amely alatt a Föld egyszer körbefordul a saját tengelye körül. Ezt a periódust **24 órára** osztották, amit további kisebb egységekre lehet bontani: **perc** és **másodperc**. Ezeket az egységeket használjuk, ha az időről beszélünk.

## Perc (min)

60 perc van egy **órában**.

## Másodperc (sec vagy s)

60 másodperc 1 **perc**. A másodperc a legkisebb egység hagyományos órán. Ez megközelítőleg egy szívverésnyi idő, vagy másképp, mialatt kimondanád a szót: „hippopotamusz”.

## Millimásodperc (Mi nem használjuk)

A **másodperc** ezredrésze. Nagyon nagy sebességek\* esetén használják ezt a mértékegységet, például a számítógépek információtovábbításának idejére.

## 12 órás órák

Az órák általában két 12 órás részre osztják a napot.

Az első csoportba tartozik az **éjfél**től (éjjel 12-től) **dél**ig (déli 12-ig) tartó időszak, erre mondjuk, hogy **délelőtt** (de). A második csoportba tartozó időtartam: déltől éjjél, azaz **délután** (du).

A **perceket** általában egy ponttal választjuk el az óráktól. Például, ha 6 óra múlt 15 perccel, azt úgy írhatjuk, hogy 6.15. A pont itt nem tizedespont, az idő számításakor nem használjuk a tízes alapú rendszert.



Délelőtt 10.20



Éjjel 10.20



A digitális órák gyakran használják 24 órás rendszert. Ez a kijelző délután 4.20-at mutat.

## 24 órás órák

A 24 órás rendszerben való számolás esetén nincs szükség a de., du. jelölésekre, mert a számok 0-23 órát mutatnak. Az egyjegyű órák elé kiírnak egy 0-t, pl.: 01, 02, ... Előfordul, hogy a 24 órás rendszer négy számjeggyel írja le az időt, nem használva pontot az órák és **percek** között. Például, délután 2 óra után 20 perccel: 1420. (Mi nem!)

A lenti táblázat azt mutatja, hogy írjuk a **12 órás** rendszerben megadott időpontokat 24 órás rendszerben.

### 12 órás írásmód

### 24 órás írásmód

éjjel	12.00	00:00 óra
de.	1.00	01:00 óra
de.	2.00	02:00 óra
de.	3.00	03:00 óra
de.	4.00	04:00 óra
de.	5.00	05:00 óra
de.	6.00	06:00 óra
de.	7.00	07:00 óra
de.	8.00	08:00 óra
de.	9.00	09:00 óra
de.	10.00	10:00 óra
de.	11.00	11:00 óra
déli	12.00	12:00 óra
du.	1.00	13:00 óra
du.	2.00	14:00 óra
du.	3.00	15:00 óra
du.	4.00	16:00 óra
du.	5.00	17:00 óra
du.	6.00	18:00 óra
du.	7.00	19:00 óra
du.	8.00	20:00 óra
du.	9.00	21:00 óra
du.	10.00	22:00 óra
du.	11.00	23:00 óra



# ALGEBRA

Az **algebra** a matematikának az az ága, amikor betűk és szimbólumok segítségével mutatjuk meg a számokat és a köztük lévő kapcsolatokat.

Az ábécé elején álló betűket általában az ismert mennyiségek jelölésére, az ábécé végén álló betűket az ismeretlen mennyiségek jelölésére használjuk.

$$x = 2a$$

Az algebraiban kisbetűket és szimbólumokat használunk ismeretlen mennyiségek közti összefüggések kifejezésére.

## Algebrai kifejezés

A matematikai állításokat algebrai alakban szoktuk megadni. Egy kifejezés tartalmazhatja betűk és számok bármely kombinációját, és gyakran szerepelnek műveleti jelek is, mint az összeadás, kivonás, osztás vagy szorzás jele.

Pl.:  $7x - 4$ ,  $14 + (y - 2)$ ,  $12z$

Ha egy algebrai kifejezés két vagy több tagot is tartalmaz, **polinomnak** nevezzük.

Amennyiben az algebrai kifejezésben két tag szerepel, **kétagú kifejezésnek** hívjuk.

Pl.:  $2x + y$ . Ha három tagból áll, **háromtagú algebrai kifejezésről** beszélhetünk.

Pl.:  $3x + y - xy$ .

## Algebrai azonosság

Az a matematikai állítás, melyben két **algebrai kifejezés** egyenlő a **változó** értékétől függetlenül. Az azonosságot jelölő szimbólum: Pl.:  $x + x = 2x$ .

## Képlet

Olyan általános érvényű szabály, amit algebrai kifejezés segítségével írunk le. Ilyen például, amikor a háromszög területének kiszámítását írjuk fel:

$$\text{Terület} = \frac{1}{2} am$$

Ahol  $a$  az alap,  $m$  pedig a magasság.

## Változó

Egy ismeretlen szám vagy mennyiség jelölésére használt betű. A változót leggyakrabban  $x$ -szel jelöljük, bár más betűk is előfordulnak, az általuk jelölt mennyiség kezdőbetűjével, pl.:  $m$  = magasság;  $k$  = kerület,  $t$  = terület, stb. Néha a változók értékei sorozatot alkotnak, például: ha  $y = 2x$ , azt jelenti, hogy amikor  $y = 1$ , akkor  $x = 1$ , ha  $y = 2$ , akkor  $x = 1$  és így tovább.

## Függő változó

Olyan **változó**, amelynek kiszámításához más változók kelljenek. Például, a háromszög\* területe függ az alaptól és a hozzá tarozó magasságtól\*, így a terület függő változó. A háromszög alapja és magassága nem függ semmitől, ezeket **független változóknak** hívjuk.

## Konstans

Egy olyan szám, melynek értéke nem változik. Például az  $y = 2x + 4$  kifejezésben a 4 konstans.

## Együttható

Egy konstans, ami a változó előtt áll egy kifejezésben. Például a  $3x + 4y$  kifejezésben  $x$  együtthatója 3,  $y$  együtthatója 4.

Ismeretlen együtthatók jelölésére általában az ábécé első néhány betűjét használjuk:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Pl.:  $ax + b = y$

## Tagok

Az algebrai kifejezésekben „+” vagy „-” műveleti jellel elválasztott részek. Egy algebrai tag lehet egy **ismeretlen**, egy **konstans** vagy ezek **kombinációja**. Például:  $2 + 3y + 5x - 1$  kifejezésben a 2: konstans, a  $3y$  változó és együtthatója,  $5x$  szintén változó és együtthatója, és az 1 megint csak konstans.

Azokat a tagokat, melyek ugyanazon ismeretleneket tartalmazzák ugyanazon a hatványon\*, egynemű kifejezéseknek mondjuk, és összevonhatjuk őket. Azokat a tagokat, amelyek különböző betűket vagy azok kombinációját tartalmazzák, **nem egynemű tagoknak** nevezzük, ezek nem vonhatók össze. Például  $yx$  és  $xy$  egynemű, tehát összevonható  $2xy$  formában, de  $3y$  és  $y^3$  nem egynemű, így nem vonható össze.





# AZ ALGEBRA ALAPJAI

A számokkal kapcsolatos általános szabályokkal is az algebra foglalkozik. A 76–78. oldalon a legfontosabb szabályokat találod, amelyeket érdemes megtanulni. Hasznos információkat tartalmaznak arról, hogyan lehet különböző módszerekkel algebrai kifejezésekkel\* bánni.

Az algebrai kifejezéseket többféle alakban is írhatjuk, mégis ugyanazt jelentik.

## A számok és az algebra szabályai

### Zárójelek

Zárójelet akkor használunk, ha különböző algebrai tagokat akarunk csoportosítani. Ha egy tag közvetlenül a zárójel előtt áll, azt jelenti, hogy vele meg kell szorozni a zárójelben lévő összes tagot. Például  $6x - 6y$  úgy is írható, hogy  $6(x - y)$ .

### Hatványozás

A jobb felső indexbe\* kerülő szám azt mutatja, hogy hányszor kell az alapot összeszorozni önmagával, hogy hány tényező kerül a szorzatba. Pl.:  $x^2$  azt jelenti, hogy  $x \cdot x$ . A negatív szám a kitevőben az eredeti hatvány reciprokát jelenti, vagyis  $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ .

Az azonos alapú hatványokat\* összeszorozhatjuk a kitevők összeadásával, vagy oszthatjuk őket a kitevők kivonásával.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{és} \quad a^n : a^m = a^{n-m}$$

Az azonos alapú, de különböző kitevőjű kifejezéseket nem lehet összeadni vagy kivonni a fentihez hasonló módon, mivel nem egyneműek\*.

A hatványozás többi szabálya is jól alkalmazható. Ezeket itt lent összesítjük, de részletesebben megtalálod őket a 22. oldalon.

$$a^1 = a$$

$$1^a = 1$$

$$a^0 = 1$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

### Szorzás

A szorzást\* az algebraban rendszerint műveleti jel nélkül írjuk.

Pl.:  $a \cdot b \cdot c$  helyett  $abc$ .

A szorzás kommutatív művelet, vagyis  $abc = bca = bac = cab = cba$ .

Pl.:  $5 \cdot 3 \cdot x = 3 \cdot 5 \cdot x = \dots = 15x$

### Előjeles számok

Egy negatív tagot\* hozzáadni valamihez ugyanaz, mint kivonni a pozitív tagot.

Pl.:  $2x + (-x) = 2x - x = x$

Egy negatív tagot kivonni ugyanaz, mint hozzáadni a pozitív megfelelőjét.

Pl.:  $2x - (-x) = 2x + x = 3x$

Azonos előjelű kifejezések osztása vagy szorzása során mindig pozitív eredményt kapunk.

Pl.:  $4 \cdot 3y = 12y$

$$-4 \cdot -3y = 12y$$

és  $16y : 4y = 4$

$$-16y : -4y = 4$$

Ellentétes előjelű kifejezések osztásakor vagy szorzásakor az eredmény mindig negatív lesz.

Pl.:  $4 \cdot -3y = -12y$

és  $-16y : 4y = -4$

### Műveleti sorrend (lásd a 22. oldalon)

Olyan kifejezésekben, ahol vegyesen szerepelnek műveletek, nem mindegy, hogy milyen sorrendben végezzük el őket. Kövesd a következő szabályt:

**Zárójelek**

**Hatványozás\***

**Osztás**

**Szorzás**

**Összeadás**

**Kivonás**

Tanuljunk megint egy „értelmetlen” kifejezést: **ZÁHO SzÖKik.**



## Algebrai törtek

Egyenlő törtek\* esetén a törtek számlálóját (fent lévő érték) és nevezőjét (lenti érték) megszorozhatjuk vagy eloszthatjuk ugyanazzal a számmal.

$$\text{Pl.: } \frac{3x}{9} = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3} = \frac{xy}{3y} = \frac{x^2}{3x}$$

Az algebrai törteket ugyanúgy összeadhatjuk vagy kivonhatjuk, mint a normál törteket, megkeresve a közös nevezőt. (Az algebrai kifejezések közös nevezői mindig egyenműek\*.)

$$\text{Pl.: } \frac{3}{2x} + \frac{2}{x} = \frac{3}{2x} + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot x} = \frac{7}{2x}$$

Ha egy szorzat tartalmaz algebrai törteket, ugyanúgy járunk el, vagyis meg kell szorozni a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel, majd egyszerűsítjük\* a kapott törtet, hogy a legegyszerűbb alakhoz jussunk.

$$\text{Pl.: } \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{\cancel{3}a \cdot a}{4 \cdot \cancel{3}} = \frac{a^2}{4}$$

Az algebrai törtek osztása úgy a legegyszerűbb, ha vesszük a második tört (osztó) reciprokát\*, és összeszorozzuk a számlálókat és a nevezőket, majd a fenti módon egyszerűsítünk.

$$\begin{aligned} \text{Pl.: } \frac{3x}{4} : \frac{x}{2} &= \frac{3x}{4} \cdot \frac{2}{x} \\ &= \frac{3x \cdot 2}{4 \cdot x} = \frac{\cancel{3x} \cdot \cancel{2}}{\cancel{4} \cdot \cancel{x}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

## Behelyettesítés

Amikor az algebrai kifejezésben\* szereplő betűket konkrét számértékkel helyettesítjük, **behelyettesítésről** beszélünk.

Behelyettesítünk akkor is, amikor különböző alakzatok, testek jellemzőit számoljuk ki – úgy mint terület\* vagy térfogat\* – egy képlet segítségével.

Például egy háromszög területének kiszámítása:

$$\text{Terület} = \frac{1}{2} am$$

Ahol  $a$  jelenti az alapot és  $m$  a magasságot. Hogy megkapjuk egy 8 cm alaphosszúságú és 7 cm magasságú háromszög területét, ezeket az adatokat be kell helyettesíteni a képletbe:

$$\text{Terület} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = \frac{1}{2} \cdot 56 = 28 \text{ cm}^2.$$

## Egyszerűbb alak

Az algebrai kifejezésekben\* a tagok egyesítését **egyszerűbb alakra hozásnak** nevezzük. Az összeadást és kivonást tartalmazó kifejezésekben az egyenmű tagok\* összevonásával tudjuk egyszerűbb alakra hozni a kifejezést. Például:

$$3x + 6y + 2y - x$$

egyesítsük az  $x$ -es tagokat:

$$(3x - x) + 6y + 2y = 2x + 6y + 2y$$

egyesítsük az  $y$ -os tagokat:

$$2x + (6y + 2y) = 2x + 8y$$

A szorzást tartalmazó algebrai kifejezésekben egyszerűen csak szorozzuk össze a tényezőket. Például írjuk egyszerűbben az  $5a \cdot 3b$  kifejezést, először a teljes alakját:

$$= 5 \cdot a \cdot 3 \cdot b$$

a számok összeszorozása ( $5 \cdot 3$ ):

$$= 15 \cdot a \cdot b$$

a betűk összeszorozása ( $a \cdot b$ ):

$$= 15ab$$

Az osztást tartalmazó kifejezést az egyszerűsítés szabálya alapján tudjuk egyszerűbb alakra hozni.

Például a  $8pq^3 : 4q$  kifejezés egyszerűsítéséhez írjuk át tört alakba, majd egyszerűsítsük:

$$\frac{8 \cdot p \cdot \cancel{q} \cdot q \cdot q}{\cancel{4} \cdot \cancel{q}} = 2pq^2$$

Ha olyan törteket akarunk összevonni, melyek számlálójában és/vagy nevezőjében egynél több tag szerepel, érdemes ezeket zárójelbe tenni. Például:

$$\frac{a}{3} + \frac{a-1}{2}$$

$$\text{Tegyük a számlálót zárójelbe:} \quad = \frac{a}{3} + \frac{(a-1)}{2}$$

$$\text{Keressünk közös nevezőt:} \quad = \frac{2a}{6} + \frac{3(a-1)}{6}$$

$$\text{Szorozzuk be a zárójelet:} \quad = \frac{2a}{6} + \frac{(3a-3)}{6}$$

$$\text{Írjuk az egészet egy közös törtbe:} \quad = \frac{2a + 3a - 3}{6}$$

$$\text{Vonjunk össze az egyenműeket:} \quad = \frac{5a - 3}{6}$$





## Zárójel felbontása

Azokban a kifejezésekben\*, ahol zárójelek is szerepelnek, összevonás előtt fel kell **bontani** a zárójeleket. Ehhez a zárójel előtti számmal be kell szorozni a zárójelben szereplő minden tagot\*.

$$\text{Pl.: } 2(x - 5y) + 5(x + 3y) \\ = 2x - 10y + 5x + 15y$$

Most már összevonhatjuk az egynemű tagokat:

$$2x - 10y + 5x + 15y = 7x + 5y$$

Ha egy kifejezésben két zárójeles tényezőt kell összeszorozni, szorozzuk meg az egyik zárójel minden tagját a másik zárójel minden tagjával.

$$\text{Pl.: } (2x + y) \cdot (5x - 2y) \\ = (2x \cdot 5x) + (2x \cdot -2y) + (y \cdot 5x) + (y \cdot -2y) \\ = 10x^2 - 4xy + 5xy - 2y^2$$

A kifejezés még egyszerűbben írható:

$$10x^2 - 4xy + 5xy - 2y^2 \\ = 10x^2 + xy - y^2$$

Ugyanez az eljárás zárójeles kifejezések négyzetre emelésékor:

$$\text{Pl.: } (x + a)^2 = (x + a)(x + a) \\ = x^2 + xa + xa + a^2 \\ = x^2 + 2xa + a^2$$

(ne feledjük, hogy  $ax$  és  $xa$  tag egynemű)

$$\text{és } (x - a)^2 = (x - a)(x - a) \\ = x^2 - xa - xa + a^2 \\ = x^2 - 2xa + a^2$$

Ezt a két kifejezést érdemes megjegyezni mind négyzetes, mind összeg formában:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 \\ (x - a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$$

### Kiemelés, szorzattá alakítás

Amikor egy kifejezésből **kiemelünk**, tulajdonképpen szorzattá\* alakítjuk, ahol a kiemelt szám vagy betű az egyik szorzótényező\*. Például, ahhoz, hogy kiemeljünk az  $5x - 15$  kifejezésből, keressünk közös tényezőt\* (5), és írjuk egy zárójel elé:

$$5(\quad)$$

Aztán osszuk el a közös tényezővel mindkét tagot\*: ( $5x : 5 = x$  és  $-15 : 5 = -3$ ) és írjuk az eredményt a zárójelbe:

$$5x - 15 = 5(x - 3)$$

Ellenőrizzük a szorzattá alakítás helyességét a **zárójel felbontásával**.

$$5(x - 3) = 5x - 15, \text{ vagyis helyes.}$$

### Másodfokú kifejezések szorzattá alakítása

A másodfokú kifejezések (tartalmaznak egy négyzetes tagot) szorzattá alakítása már két zárójelet igényel. Például írjuk szorzat alakjában:

$$p^2 + 4p - 12$$

Keressünk olyan számpárt, melynek szorzata  $-12$ , összege pedig 4.

$$(p - 2)(p + 6)$$

Ez a felbontás helyes, mivel

$$-2 \cdot 6 = -12 \text{ és } -2 + 6 = 4$$

$$\text{és } (p \cdot p) + (p \cdot 6) + (-2 \cdot p) + (-2 \cdot 6) \\ = p^2 + 6p - 2p - 12 = p^2 + 4p - 12$$

### Két négyzetszám különbsége

Olyan kéttagú\* kifejezés, melynek mindkét tagja egy-egy négyzetszám (az ő különbségüket keressük). Például, az  $x^2 - y^2$  kifejezés két négyzet különbsége, melynek szorzatalakja:  $(x + y)(x - y)$ .

Például, ha az  $x^2 - 36$  kifejezést akarjuk tényezőkre bontani, írjunk fel két zárójelet. Mindkét zárójelben az első tag\*  $x$  lesz (mivel a négyzete  $x^2$ ).

$$(x \quad)(x \quad)$$

A zárójelek második tagjai a 36 pozitív és negatív négyzetgyökei lesznek:

$$(x + 6)(x - 6)$$

Ellenőrizzük le a zárójelek felbontásával:

$$(x + 6)(x - 6)$$

$$= (x \cdot x) + (x \cdot -6) + (6 \cdot x) + (6 \cdot -6)$$

$$= x^2 - 6x + 6x - 36$$

$$= x^2 - 36$$

### Teljes négyzet

Olyan szám, mely egy másik szám (négyzetgyök\*) önmagával vett szorzatának eredménye.

Egy **természetes szám\*** négyzete is biztosan egész szám lesz (pl.  $4 \cdot 4 = 16$ ).

Egy **racionális szám\*** négyzete nem feltétlenül egész szám (pl.  $2,5 \cdot 2,5 = 6,25$ )



# EGYENLETEK

Egy algebrai **egyenlet** olyan matematikai állítás, melyben két algebrai kifejezés\* egyenlő. Az egyenlet megoldása a benne szereplő ismeretlen\* (ismeretlenek) értékének meghatározását jelenti. Az az érték, mely kielégíti (igazzá teszi) az egyenletet, az egyenlet **megoldása**.

## Egyenletrendezés

Ha szükséges, az egyenlet egyes tagjait\* átrendezhetjük az egyenlőségjel másik oldalára. Ezt úgy is mondjuk, hogy az egyenlet levezetése.

Például fejezzük ki  $x$ -et a következő

egyenletből:  $4y = 2x - 6$

Hagyjuk az  $x$ -es tagot a saját oldalán, és adjunk 6-ot mindkét oldalhoz:

$$4y + 6 = 2x - 6 + 6$$

$$4y + 6 = 2x$$

A következő lépésben osszunk 2-vel, hogy megkapjuk  $x$  értékét:

$$\frac{4y + 6}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$2y + 3 = x$$

Fordítsuk meg az egyenletet, így  $x$ -et kapjuk meg:

$$x = 2y + 3$$

Előfordulhat, hogy a kifejezni kívánt változó nem csak egy tagjában szerepel az egyenletnek. Ilyenkor gyűjtsük az összes ismeretlent tartalmazó tagot egy oldalra, így ott az lesz a kiemelhető közös tényező\*. Például fejezzük ki  $p$ -t a következő egyenletből.

$$\frac{p+q}{r} = \frac{p+r}{q}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt  $r$ -rel:  $p + q = \frac{pr + r^2}{q}$

Szorozzuk meg mindkét oldalt  $q$ -val:  $pq + q^2 = pr + r^2$

Vonjunk ki  $q^2$ -et mindkét oldalból:  $pq = pr + r^2 - q^2$

Vonjunk ki  $pq$ -t mindkét oldalból:  $pq - pr = r^2 - q^2$

Emeljünk ki  $p$ -t a bal oldalán:  $p(q - r) = r^2 - q^2$

Osszunk  $q - r$ -rel:  $p = \frac{r^2 - q^2}{q - r}$

Bontsuk két tényező szorzatára a számlálót:  $p = \frac{(r - q)(r + q)}{q - r}$

Egyszerűsítsünk:  $p = \frac{(r - q)(r + q)}{q - r}$

(note,  $q - r = -(r - q)$ )

Az egyenlet legegyszerűbb alakja:  $p = -(r + q)$

$$x - 3 = y + 1$$

Az egyenlet két oldalát egy egyenlőségjel választja el (=).

## Az egyenlőségjel (=)

Az a szimbólum, amely azt mutatja, hogy két kifejezés egyenlő. Hogy fenntartsuk ezt az egyenlőséget, bármilyen műveletet is végzünk az egyenlet egyik oldalán, el kell végezni a másik oldalon is.

## Egyenletmegoldás

Ha egy egyenletben csak egy változó van, annak kifejezése adja az egyenlet **megoldását**, tehát a változó értékét keressük. Ezt mondjuk az egyenlet **megoldásának**.

Például oldjuk meg a következő egyenletet:

$$5x - 3 = 3x + 4$$

Adjunk 3-at mindkét oldalhoz:

$$5x = 3x + 7$$

Vonjunk ki  $3x$ -et mindkét oldalból:

$$5x - 3x = 3x + 7 - 3x$$

$$2x = 7$$

Osszunk 2-vel:  $x = 3,5$

Az egyenlet megoldása:  $x = 3,5$ .

Behelyettesítéssel\* ellenőrizheted ezt a végeredményt.

## Próbálgatás, becslés

Az is egy megoldási módszer lehet, ha néhány számot kipróbálunk, igazzá teszik-e az egyenletet. A számokat érdemes bizonyos rendszer, logika szerint kipróbálni. Ha a megoldás negatív, tört vagy tizedestört, akkor ez az eljárás túl hosszú más megoldáshoz képest.

Például keressük meg a  $6x + 2 = 20$  megoldását:

Próbáljunk ki egy számot, mondjuk, a 4-et:

$$(6 \cdot 4) + 2 = 26, \quad \text{tehát a 4 túl nagy.}$$

Próbáljunk ki egy kisebbet, mondjuk a 2-t:

$$(6 \cdot 2) + 2 = 14, \quad \text{tehát a 2 túl kicsi.}$$

Próbáljunk egy nagyobbat, a 3-at:

$$(6 \cdot 3) + 2 = 20, \quad \text{tehát a 3 a megoldás.}$$





# ALGEBRAI GRAFIKONOK

A **grafikon** olyan ábra, amely az egyenletben\* szereplő változók\* közötti kapcsolatot mutatja meg. A kapott egyenes vagy görbe pontjainak koordinátái az egyenlet megoldásai, vagyis igazzá teszik az állítást.

## Grafikonkészítés

Megrajzolásukhoz a Descartes-féle\* koordinátarendszert használjuk. A grafikonkészítés lépései:

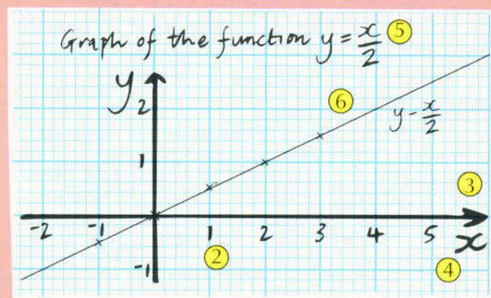
① Készítsünk  $x$  és  $y$  koordinátákhoz értéktáblázatot. Például, az  $y = \frac{x}{2}$  értéktáblázata:

$x$	-1	0	1	2	3
$y = \frac{x}{2}$	-0.5	0	0.5	1	1.5

Győződj meg róla, hogy elegendő pontot legyen, egy egyeneshez legalább 3, egy görbéhez több.

② Válasszunk megfelelő egységet a tengelyekre\*, és osszuk be egyenlő intervallumokra!

Választhatod például azt, hogy egy négyzet egy egység, de egy négyzet jelenthet akár 10 egységet is. Ha szükséges, a két tengelyen használhatunk különböző egységet.



③ Rajzoljunk nyilakat a tengelyek végére

(ezzel jelezve, hogy a végtelenig tartanak)!

④ Jelöljük a tengelyeket a megfelelő betűkkel ( $x$  vagy  $y$ ), de attól is függhet, mit jelentenek a tengelyek, ekkor megadjuk az egységet is pl.: idő (perc).

⑤ Adjunk a grafikonnak címet!

⑥ Jelöljük be a kapott koordinátákat kereszttel vagy ponttal, majd egy hegyes ceruza és vonalzó segítségével kössük össze az egyenes pontjait. A görbéket mindig szabadkézzel rajzoljuk, úgy forgatva a papírt, hogy a kezünk mindig a görbe belsejében legyen. Hosszabbítsuk meg az egyenes vagy görbe végeit, hogy kitöltsék a teljes grafikont, és írjuk rá a görbére, hogy mit ábrázol!

## A grafikon általános jellemzői

### A függvény alakja

Az az algebrai egyenlet\*, mely úgy kezdődik, hogy „ $y = \dots$ ”. Ez az alak lehetővé teszi az egyes  $x$  és  $y$  értékek kiszámítását, amelyek a grafikon megrajzolásához kellenek. A függvényekről bővebben a 92. és 93. oldalon olvashatsz.

### $x$ – tengelymetszet

Az a pont, ahol a grafikon metszi az  $x$  tengelyt, vagyis ahol  $y = 0$ .

### $y$ – tengelymetszet

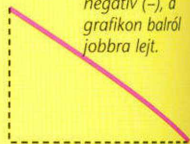
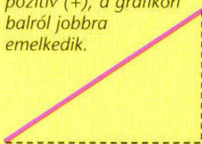
Az a pont, ahol a grafikon metszi az  $y$  tengelyt, vagyis ahol  $x = 0$ .

### Meredekség (m)

A grafikon emelkedése.

Ha a meredekség pozitív (+), a grafikon balról jobbra emelkedik.

Ha a meredekség negatív (-), a grafikon balról jobbra lejt.

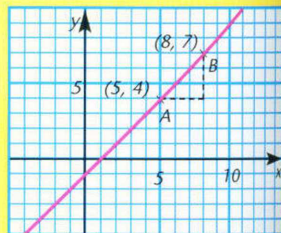


A meredekség tulajdonképpen egy arány, amelyben  $y$  változását nézzük, mialatt az  $x$  is változik az egyenes két pontja között. Minél nagyobb a meredekség, az egyenes annál jobban emelkedik. Egy egyenes meredekségének kiszámításához válasszunk ki két pontot (A és B), és használjuk a következő szabályt:

$$\text{meredekség} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Az AB egyenes meredekségét kiszámíthatjuk:

$$\begin{aligned} \frac{7 - 4}{8 - 5} \\ = \frac{3}{3} \\ = 1 \end{aligned}$$





## Az egyenes grafikonja

Egy **egyenesen** vagy **lineáris grafikonon** minden pont koordinátája, amely kielégíti az egyenletet, összeköthető egyetlen egyenes vonallal. Egy **lineáris egyenletet** többféle módon is felírhatunk:

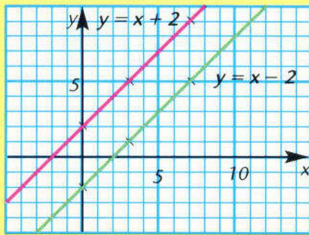
### Merekséggel

Az egyenes egyenlete:

$$y = mx + b$$

ahol  $m$  a **meredekség**,  $b$  pedig az  $y$  tengelymetszet, (ahol a grafikon metszi az  $y$ -tengelyt) például az  $y = 2x + 3$  egyenletből leolvasható meredekség 2, az  $y$ -tengelymetszet pedig a  $(0;3)$  pont.

Párhuzamos egyenesek meredeksége egyenlő, így ha két egyenletben megegyezik  $m$  értéke, a két egyenes párhuzamos lesz egymással.



Az  $y = x + 2$  és  $y = x - 2$  egyenletű egyenesek párhuzamosak, mivel meredekségük egyenlő (ebben az esetben  $m=1$ ).

### Általános alak

Az egyenes egyenlete:

$$ax + by + c = 0$$

Az általános alakban a tagoknak nincs geometriai jelentése: itt például  $c$  nem az  $y$ -tengelymetszet.

Hogy átirjunk egy egyenes egyenletet általános alakból meredekséggel kifejezett formába, rendezzük  $y$ -ra az egyenletet, majd osszuk az  $y$  együtthatójával\*!

$$\text{Pl.: } 4x - 2y - 2 = 0$$

$$-2y = 2 - 4x$$

$$y = \frac{2 - 4x}{-2}$$

$$y = 2x - 1$$

Az egyenletek más alakjával is hasonlóan járhatunk el:

$$\text{Pl.: } 4x - 2 = 2y$$

$$\frac{4x - 2}{2} = \frac{2y}{2}$$

$$2x - 1 = y$$

$$y = 2x - 1$$

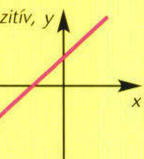
## Adott egyenes egyenletének meghatározása

Használjuk a grafikont  $m$  értékének (**meredekség**) és  $b$  ( $y$ -tengelymetszet) értékének leolvasására. Ezen értékek segítségével  $y = mx + b$

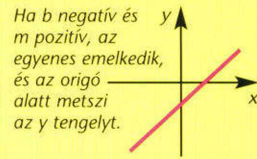
### Az egyenes vázlata

A lineáris egyenlet elegendő információt tartalmaz ahhoz, hogy az egyenes vázlatát elkészíthessük értéktáblázat készítése nélkül is. A **meredekséget** tartalmazó egyenlet:  $y = mx + b$  megadja a **meredekséget** ( $m$ ) és azt, hogy hol metszi a grafikon az  $y$ -tengelyt ( $b$ ).

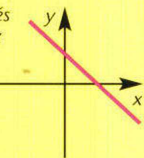
Ha  $m$  és  $b$  pozitív,  $y$  a grafikon emelkedik, és az origó fölött metszi az  $y$ -tengelyt.



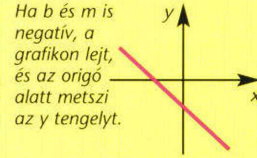
Ha  $b$  negatív és  $m$  pozitív, az egyenes emelkedik, és az origó alatt metszi az  $y$ -tengelyt.



Ha  $b$  pozitív és  $m$  negatív, az egyenes lejt, és az origó fölött metszi az  $y$ -tengelyt.

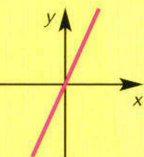


Ha  $b$  és  $m$  is negatív, a grafikon lejt, és az origó alatt metszi az  $y$ -tengelyt.

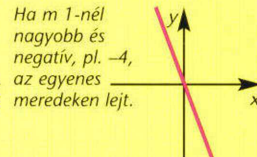


Ha  $b = 0$ , az egyenes egyenlete  $y = mx$  alakban írható. Az ilyen egyenesek mindig az origóban metszik az  $y$  tengelyt (ahol  $x = 0$  és  $y = 0$ ), és meredekségük  $m$ .

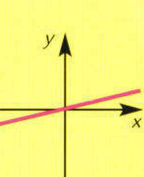
Ha  $m$  1-nél nagyobb és pozitív, pl. 4, az egyenes meredeken emelkedik.



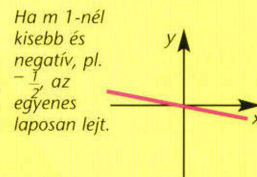
Ha  $m$  1-nél nagyobb és negatív, pl. -4, az egyenes meredeken lejt.



Ha  $m$  1-nél kisebb és pozitív, pl.  $\frac{1}{2}$ , az egyenes laposan emelkedik.

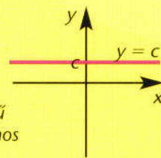


Ha  $m$  1-nél kisebb és negatív, pl.  $-\frac{1}{2}$ , az egyenes laposan lejt.



Ha a meredekség nulla, az egyenes vízszintes\*, azaz párhuzamos\* az  $x$  tengellyel.

Az  $y = c$  egyenletű egyenes párhuzamos az  $x$  tengellyel.





## Lineáris függvény pontjainak kiszámítása az egyenletből

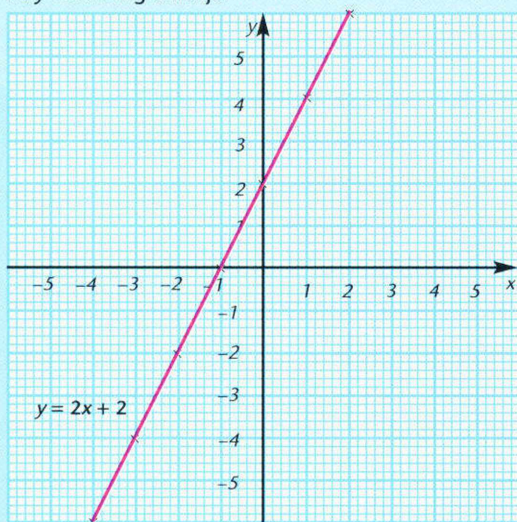
Pl. rajzoljuk meg az  $y=2x+2$  egyenes pontjait:

1. Készítsünk értéktáblázatot.

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y=2x+2$	-6	-4	-2	0	2	4	6

2. Jelöljük ezeket a koordinátákat\* a grafikonon, és kössük össze őket egy egyenessel.

Az  $y=2x+2$  grafikonja



3. Az egyenlet megoldása\* az a pont lesz, amely kielégíti az egyenletet is, és az  $y=0$  feltételt is. (Vagyis ahol a grafikon metszi az  $x$  tengelyt.) Ebben az esetben a megoldás  $x=-1$ .

## Másodfokú függvény

A másodfokú függvény egy másodfokú kifejezés ábrázolása. Minden másodfokú függvény egyenlete felírható ebben az alakban:

$$y = ax^2 + bx + c$$

ahol  $a$ ,  $b$  és  $c$  konstans, de  $a$  nem lehet 0.

### Parabola

Egy „U” alakú szimmetrikus\* grafikon. Minden négyzetes függvény\* parabolát ad, de a négyzetes tag együtthatójának, az  $a$ -nak az előjele dönt arról, hogy pozitív vagy negatív a parabola (felfelé vagy lefelé nyitott).

*Ha a pozitív,  
így néz ki a  
parabola.*

*Ha a negatív,  
így néz ki a  
parabola.*

## Másodfokú függvény rajzolása

Itt is érvényesek a grafikon rajzolásának általános szabályai (lásd 80. oldal), ha másodfokú görbét rajzolunk, mindig leolvashatjuk:

- a parabola tengelypontját
- az  $x$  tengelyen található metszéspontokat

## Másodfokú függvény pontjainak kiszámítása az egyenletből

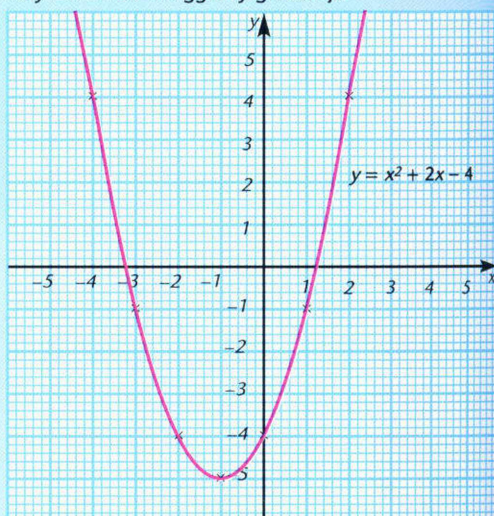
A másodfokú függvény pontjait hasonlóan kaphatjuk meg, mint más típusú grafikon pontjait. Például rajzoljuk meg az  $y = x^2 + 2x - 4$  egyenlet\* / függvény\* grafikonját:

1. Készítsünk értéktáblázatot, amely megmutatja a grafikon koordinátáit\*:

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y = x^2 + 2x - 4$	4	-1	-4	-5	-4	-1	4

2. Jelöljük a kapott pontokat, és kössük össze őket egy görbével.

Az  $y = x^2 + 2x - 4$  függvény grafikonja



3. Az egyenlet megoldásai\* azok a pontok, melyek kielégítik az  $y = x^2 + 2x - 4$  és az  $y=0$  egyenleteket. Ezek azok a pontok, ahol a grafikon metszi az  $x$  tengelyt. Itt a megoldás megközelítőleg  $x_1 = 1,2$  és  $x_2 = -3,2$ .



## A köbfüggvény

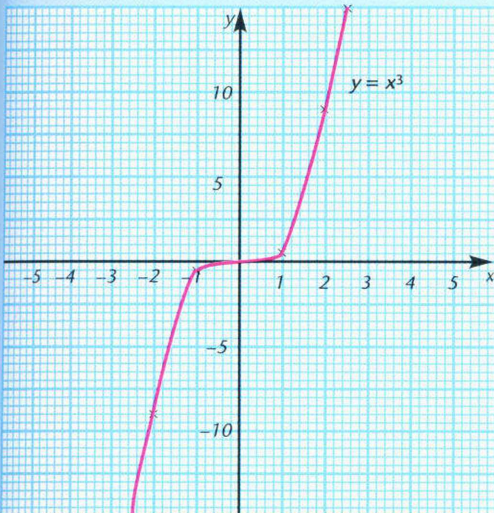
A köbfüggvény egy harmadfokú kifejezés ábrája, ami tartalmaz  $x^3$ -ös tagot. Minden harmadfokú függvény felírható a következő alakban:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

ahol  $a$ ,  $b$ ,  $c$  és  $d$  konstans számok, a nem lehet 0 és  $d$  az  $y$ -tengelymetszet.

A legegyszerűbb köbfüggvény az  $y = x^3$ .

Az  $y = x^3$  függvény grafikonja

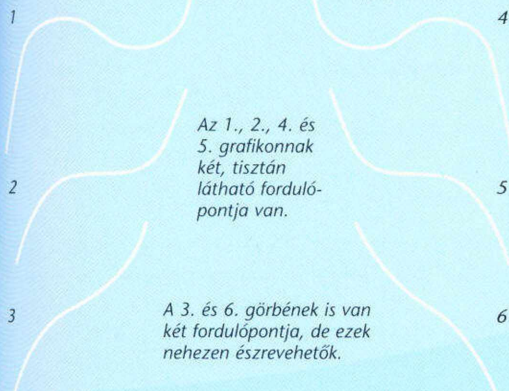


## A köbfüggvény görbéje

A függvény görbéjében két kanyarulat is van. Hogy mennyire élesen emelkedik a görbe, azt az  $a$  értéke mutatja az  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  egyenletben.

Ha a értéke pozitív,  
a görbe hasonló az  
1., 2. és 3. esethez.

Ha a értéke negatív,  
a görbe a 4., 5. és  
6. esethez fog  
hasonlítani.



## A köbfüggvény pontjai

A harmadfokú grafikon pontjait hasonlóan kaphatjuk meg, mint más típusú grafikon pontjait.

Például, az  $y = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$  egyenletű grafikon pontjai:

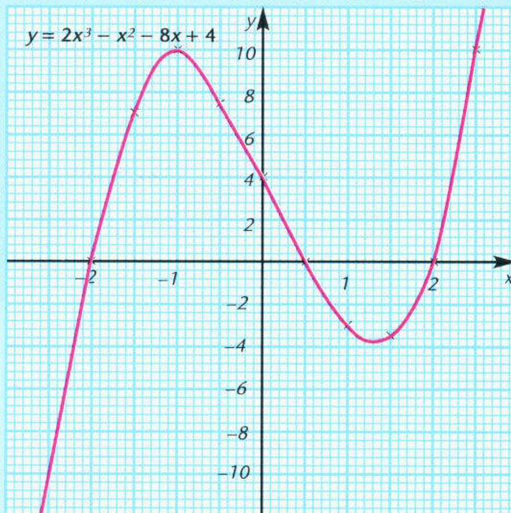
- Készítsünk értéktáblázatot a grafikon pontjainak koordinátáihoz:

$x$	-2	-1.5	-1	-0.5
$y = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$	0	7	9	7.5

$x$	0	0.5	1	1.5	2
$y = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$	4	0	-3	-3.5	0

- Jelöljük be ezeket a pontokat az ábrán, és kössük össze őket egy görbével!

Az  $y = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$  egyenletű függvény grafikonja



- A harmadfokú egyenlet megoldásai\* azok a pontok, amelyek kielégítik a harmadfokú egyenletet, és az  $y = 0$  egyenletet is. Ezek azok a pontok, ahol a függvény grafikonja metszi az  $x$  tengelyt. Egy harmadfokú egyenletnek három megoldása is lehet. A fenti példa megoldásai:  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 0,5$  és  $x_3 = 2$ .





## Exponenciális függvény

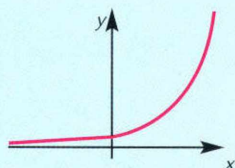
Olyan algebrai kifejezés\* ábrázolása, ahol az  $y$  egy  $a$  pozitív szám pozitív vagy negatív hatványa. Minden exponenciális függvény felírható a következő alakban:

$$y = a^x$$

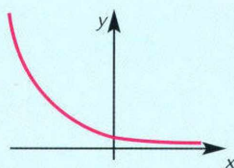
ahol  $a$  konstans.

### Exponenciális görbe

Az  $y = a^x$  függvény\* grafikonja\*. Egy exponenciális függvény görbéje az  $y$  tengelyt mindig az 1 helyén metszi ( $y = 1$ ). A függvény emelkedése  $a$ -tól függ.

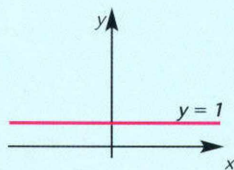


Ha  $a$  1-nél nagyobb, az exponenciális görbe ilyen.



Ha  $a$  1-nél kisebb, az exponenciális görbe ilyen.

Ha  $a$  egyenlő 1-gyel, az exponenciális görbe egy vízszintes\* egyenes ( $y = 1$ ).



## Törtfüggvény

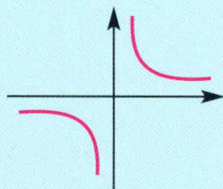
Minden törtfüggvény felírható a következő alakban:

$$y = \frac{a}{x}$$

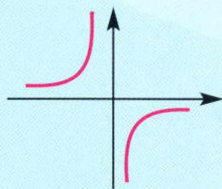
ahol  $a$  konstans\*.

### Hiperbola vagy reciprok görbe

A grafikon\* két különálló görbéből áll, amelyek ellentétei egymásnak. Minden törtfüggvény\* képe egy pozitív vagy negatív hiperbola,  $a$ -tól függően. Ha  $x = 0$ ,  $y$  nincs értelmezve.



Ha  $a$  pozitív, a hiperbola így néz ki.



Ha  $a$  negatív, a hiperbola így néz ki.

### A törtfüggvény pontjai

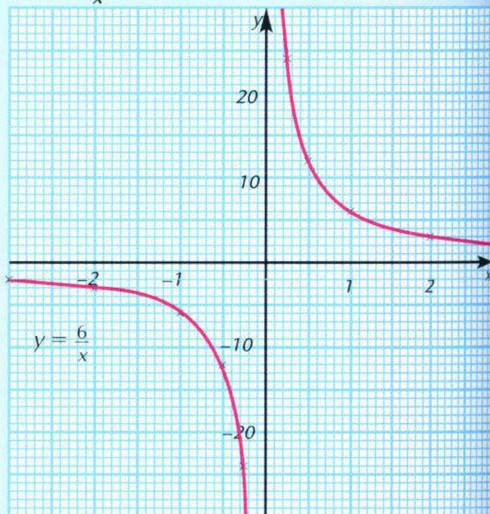
A törtfüggvény grafikonjának pontjait hasonlóan kaphatjuk meg, mint más típusú grafikon pontjait. Például az  $y = \frac{6}{x}$  függvény grafikonjának megrajzolásához készítsünk értéktáblázatot, hogy a pontok koordinátáit\* megkapjuk:

$x$	-3	-2	-1	-0.5	-0.25
$y = \frac{6}{x}$	-2	-3	-6	-12	-24

$x$	0.25	0.5	1	2	3
$y = \frac{6}{x}$	24	12	6	3	2

Jelöljük be ezeket a pontokat a grafikonon, majd kössük össze őket egy görbével!

Az  $y = \frac{6}{x}$  függvény grafikonja



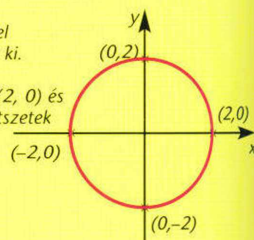
A grafikon nem metszi az  $x$  tengelyt, így a reciprok egyenletnek nincs megoldása.

### A kör grafikonja

Az  $x^2 + y^2 = r^2$  egyenlettel\* megadott görbe egy  $r$  sugarú\*,  $(0;0)$  középpontú kör.

Az  $x^2 + y^2 = 4$  egyenlettel megadott görbe így néz ki.

Az  $x$  tengelymetszetek:  $(2, 0)$  és  $(-2, 0)$ . Az  $y$  tengelymetszetek  $(0, 2)$  és  $(0, -2)$ .





# MÁSODFOKÚ EGYENLET

Olyan **egyenlet**, mely másodfokú kifejezést tartalmaz, vagyis a **változó négyzete** is szerepel benne. Egy másodfokú egyenlet általános alakja  $ax^2 + bx + c = 0$ , ahol  $a$  nem 0. Minden másodfokú egyenletnek két megoldása\* lehet, ezeket **gyököknek** nevezzük. Másodfokú egyenleteket megoldhatunk grafikus úton (lásd 82. oldal) vagy a 86. oldalon található módszerrel.

$$x^2 - 2x - 5 = 5$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 0$$

Mindkét egyenlet másodfokú, mivel felírhat  $ax^2 + bx + c = 0$  alakban.

## Megoldás szorzattá alakítással

Ennek a módszernek a lényege, hogy a másodfokú egyenletet két zárójeles kifejezés\* szorzataként írjuk fel. Mivel  $ax^2 + bx + c = 0$ , így valamelyik zárójeles kifejezésnek 0-nak kell lennie (mivel egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0). Ha mindkét zárójelet megvizsgáljuk, megkaphatjuk az egyenlet mindkét megoldását. Nem minden másodfokú egyenletet lehet szorzattá alakítani.

1. Az egyenlet bal oldalának szorzattá alakításához két zárójeles kifejezést kell találni. Először határozzuk meg az  $x$ -es részeket, aztán keressünk olyan számokat, melyek szorzata  $c$  (vagyis  $a$  konstans) összegük pedig  $b$  (vagyis  $x$  együtthatója\*) (ez csak abban az esetben igaz, ha  $a = 1$ , vagyis  $x^2$  együtthatója 1).

Pl.:  $x^2 + 6x + 8 = 0$   
 $(x + 4)(x + 2) = 0$

(az  $x$ -es tagok is helyesek, mivel  $x \cdot x = x^2$ , és a számok is jók, mivel  $2 + 4 = 6$  és  $2 \cdot 4 = 8$ )

2. Mivel a szorzat eredménye\* 0, valamelyik tényezőnek is nullának kell lennie. Számoljuk ki  $x$  értékét az egyes zárójelekben:

Pl.: ha  $(x + 2)(x + 4) = 0$   
 akkor  $(x + 2) = 0$  vagy  $(x + 4) = 0$   
 vagyis  $x = -2$  vagy  $x = -4$

Az  $x^2 + 6x + 8 = 0$  másodfokú egyenlet gyökei:

$$x_1 = -2 \quad \text{vagy} \quad x_2 = -4.$$

3. Ellenőrizzük a megoldást úgy, hogy a gyököket behelyettesítjük\* az eredeti egyenletbe:

Pl.: (amikor  $x = -2$ )  $4 + (-12) + 8 = 0$  ✓  
 (amikor  $x = -4$ )  $16 + (-24) + 8 = 0$  ✓

## A tényezők felismerése

Ha  $x^2$  együttthatója nagyobb 1-nél (mondjuk,  $2x^2$ ,  $3x^2$ ,  $4x^2$ ...), akkor nehezebb helyes módszert adni a szorzattá alakításhoz: szükség lesz némi próbálkozásra.

Például bontsuk szorzattá a következő egyenletet:  $4x^2 + 20x + 21 = 0$ . Az  $x$ -es tagok szorzatának  $4x^2$ -nek kell lennie, és a számokkal való szorzás utáni összeg 20, a számok szorzata 21 lesz.

$$(4x + 3)(x + 7) = 4x^2 + 28x + 3x + 21 = 4x^2 + 31x + 21 \quad \times$$

$$(4x + 7)(x + 3) = 4x^2 + 12x + 7x + 21 = 4x^2 + 19x + 21 \quad \times$$

$$(2x + 3)(2x + 7) = 4x^2 + 14x + 6x + 21 = 4x^2 + 20x + 21 \quad \checkmark$$

Ha egyszer találunk egy helyes szorzat-alakot, megkaphatjuk az egyenlet gyökeit:

Pl.:  $2x + 3 = 0$   
 $2x = 0 - 3$   
 $2x = -3$   
 $x = -1,5$

$$2x + 7 = 0$$

$$2x = 0 - 7$$

$$2x = -7$$

$$x = -3,5$$

A  $4x^2 + 20x + 21$  egyenlet gyökei:  
 $x_1 = -1,5$  és  $x_2 = -3,5$ .

Ellenőrizzük a megoldást úgy, hogy a gyököket behelyettesítjük\* az eredeti egyenletbe:

Pl.: (mikor  $x = -1,5$ )  $9 + (-30) + 21 = 0$  ✓  
 (mikor  $x = -3,5$ )  $49 + (-70) + 21 = 0$  ✓





## Teljes négyzetté kiegészítés

$$(x+3)^2 = 9$$

$$(x-5)^2 = 11$$

Az egyenletnek az  $(x+y)^2 = z$  alakját teljes négyzetnek hívjuk.

Teljes négyzetté alakítani azt jelenti, hogy a másodfokú egyenletet\* átalakítjuk  $(x+y)^2 = z$  alakúra. Ezzel a módszerrel bármelyik másodfokú egyenletet megoldhatjuk.

1. Győződjünk meg arról, hogy az egyenlet  $ax^2 + bx + c = 0$  alakban van, majd a c-t vigyük át az egyenlet jobb oldalára!

Például, hogy megoldjuk az  $x^2 - 6x + 2 = 0$  egyenletet, vigyük át a 2-t az egyenlet jobb oldalára:

$$\text{Pl.: } x^2 - 6x = -2$$

2. Hogy teljes négyzetté alakíthassuk a bal oldalt, vegyük az x együtthatójának\* felét, emeljük négyzetre\* az eredményt, és az így kapott számot adjuk az egyenlet mindkét oldalához!

$$\text{Például: } \left(\frac{6}{2}\right)^2 = (3)^2 = 9$$

$$\text{Így: } x^2 - 6x + 9 = -2 + 9$$

$$x^2 - 6x + 9 = 7$$

3. Írjuk fel szorzat\* alakban a bal oldalt, az  $(x+y)^2 = z$  forma szerint!

$$\text{Például: } x^2 - 6x + 9 = 7$$

$$(x-3)^2 = 7$$

4. Keressük meg az egyenlet mindkét oldalának négyzetgyökét\*!

$$\text{Például: } (x-3)^2 = 7$$

$$x-3 = \pm\sqrt{7}$$

$$x = \pm 2,64575131 + 3$$

$$\text{Így } x_1 = 5,64575131 \text{ vagy } x_2 = 0,35424869$$

5. Kerekítsük a végeredményt a megfelelő mértékben!

$$\text{Pl.: } x_1 = 5,65$$

$$\text{Vagy } x_2 = 0,354$$

## A másodfokú megoldóképlet

A másodfokú megoldóképletet bármilyen,  $ax^2 + bx + c = 0$  alakú egyenlet megoldására használhatjuk. A formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. Győződjünk meg arról, hogy az egyenlet  $ax^2 + bx + c = 0$  alakban van, és olvassuk le a, b és c értékét!

$$\text{Pl.: } 2x^2 + 4x - 6 = 0,$$

Melyben  $a = 2$ ,  $b = 4$  és  $c = -6$

2. Oldjuk meg az egyenletet az a, b és c értékek behelyettesítésével a megoldóképletbe!

$$\text{Pl.: } x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4}$$

$$x = \frac{-4 + \sqrt{64}}{4} \text{ vagy } x = \frac{-4 - \sqrt{64}}{4}$$

$$x = \frac{-4 + 8}{4} \text{ vagy } x = \frac{-4 - 8}{4}$$

$$x = \frac{4}{4} \text{ vagy } x = \frac{-12}{4}$$

$$x = 1 \text{ vagy } x = -3$$

A  $2x^2 + 4x - 6 = 0$  másodfokú egyenlet gyökei\*:  $x_1 = 1$  és  $x_2 = -3$ .

3. Ellenőrizzük a megoldást! Ha helyes,

a gyökök összege\*  $-\frac{b}{a}$ .

$$\text{Pl.: } 1 + (-3) = -2 \text{ és } -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2$$

Ezt az ellenőrzési módszert azért alkalmazhatjuk, mert a megoldóképlet két x értéket ad:

$$\frac{-b}{2a} + \frac{b^2 - 4ac}{2a} \quad \frac{-b}{2a} - \frac{b^2 - 4ac}{2a}$$

Összeadva ezt a két gyököt:

$$\left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{b^2 - 4ac}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) - \left(\frac{b^2 - 4ac}{2a}\right)$$

$$= \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$



# EGYENLETRENDSZEREK

Az **egyenletrendszer** olyan egyenletekből áll, amelyekben az azonos betűvel jelölt változó minden egyenletben ugyanazt az értéket jelenti. Egy egyenletrendszer megoldásához olyan számpárokat keresünk, melyek mindkét egyenletet kielégítik (vagyis igazgá teszik).

$$\begin{aligned} 3x + y &= 8 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$$

Ezeket az egyenleteket együtt kell megoldani,  $x$  és  $y$  értékét úgy kell kiszámolni, hogy mindkét egyenletet igazgá tegyék, ebben az esetben  $x = y = 2$ .

## Megoldás behelyettesítéssel

Az egyik egyenlet egyik változóját kifejezve behelyettesítjük\* a másik egyenletbe, így megkaphatjuk az egyik változó értékét.

1. Ha szükséges, rendezzük át úgy az egyenleteket, hogy az egyik változót kapjuk megoldásként\*:

Például a következő egyenletek megoldása\*:

$$5x - y = 13$$

$$2x + y = 15$$

rendezzük  $y$ -ra az első egyenletet:

$$y = 5x - 13$$

2. Helyettesítsük be a kapott kifejezést a második egyenletben  $y$  helyébe:

Pl.: ha  $y = 5x - 13$

$$2x + y = 15 \text{ felírható:}$$

$$2x + 5x - 13 = 15$$

3. Gyűjtjük össze az egyenmű kifejezéseket\* egy oldalra, és egyszerűsítsünk\*:

Pl.:  $2x + 5x - 13 = 15$

$$7x - 13 = 15$$

$$7x = 28$$

$$x = 4$$

4. Helyettesítsük vissza a kapott értéket valamelyik egyenletbe, hogy megkapjuk a másik ismeretlen értékét is!

Pl.:  $x = 4$ , így  $(2 \cdot 4) + y = 15$

$$8 + y = 15$$

$$y = 15 - 8$$

$$y = 7$$

A megoldás:  $x = 4$  és  $y = 7$ .

5. Ellenőrizzük a megoldást a másik egyenletbe való behelyettesítéssel!

Pl.:  $20 - 7 = 13$ , tehát a megoldás helyes. ✓

## Egyenlő együtthatók módszere

Ha valamelyik ismeretlen egyáltalán nem vagy csak előjelben tér el egymástól, akkor könnyen lecsökkenthetjük az ismeretlenek számát az egyenletek összeadásával vagy kivonásával. A megmaradt változó értékét meghatározzuk, majd behelyettesítjük valamelyik egyenletbe.

**Azonos vagy ellentétes előjelű tagok esetén:**

1. Ha a tagok azonosak ( pl.:  $2x$  és  $2x$  vagy  $-2x$  és  $-2x$ ), vonjuk ki az egyik egyenletet a másiktól! Ha a tagok ellentétes előjelűek (pl.:  $2x$  és  $-2x$ ), adjuk össze az egyenleteket! Például oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$2x - 3y = 5$$

$$x + 3y = 16$$

adjuk össze őket (mivel az előjelek különbözőek):

$$(2x - 3y) + (x + 3y) = 5 + 16$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

2. Helyettesítsük be a most kapott értéket\* valamelyik egyenletbe! A másik ismeretlen értéke kiszámítható.

Pl.:  $2x - 3y = 5$

$$(2 \cdot 7) - 3y = 5$$

$$14 - 3y = 5$$

$$3y = 14 - 5$$

$$3y = 9$$

$$y = 3$$

A megoldás  $x = 7$  és  $y = 3$ .

3. Ellenőrizzük a megoldást a másik egyenletbe való behelyettesítéssel!

Pl.:  $7 + 9 = 16$ , tehát a megoldás helyes. ✓





## Egyenlő együtthatók módszerének folytatása

Ha úgy akarjuk kizárni\* valamelyik ismeretlent, hogy az együtthatók\* a két egyenletben nem egyeznek meg, és nem is egymás ellentettjei.

1. Keressük meg az eltüntetni kívánt ismeretlen együtthatóinak legkisebb közös többszörösét\*, és szorozzuk meg az egyik vagy mindkét egyenletet, hogy az együtthatók a kívánt értéket vegyék fel!

Például oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$2x + 3y = 0$$

$$3x + 2y = 5$$

Szorozzuk meg az első egyenletet 2-vel, a másodikat 3-mal:

$$4x + 6y = 0$$

$$9x + 6y = 15$$

(Természetesen megszorozhattuk volna az első egyenletet 3-mal és a másodikat 2-vel, hogy az  $x$ -es tagok legyenek egyenlő együtthatójúak.)

2. Ha a tagok azonosak ( pl.:  $2x$  és  $2x$  vagy  $-2x$  és  $-2x$ ), vonjuk ki az egyik egyenletet a másiktól! Ha a tagok ellentétes előjelűek ( pl.:  $2x$  és  $-2x$ ), adjuk össze az egyenleteket!

$$\text{Pl.: } (4x + 6y) - (9x + 6y) = 0 - 15$$

$$-5x = -15$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

3. Helyettesítsük be a most kapott értéket valamelyik egyenletbe! A másik ismeretlen értéke kiszámítható.

$$\text{Pl.: } 4 \cdot 3 + 6y = 0$$

$$12 + 6y = 0$$

$$6y = -12$$

$$y = -2$$

A megoldás:  $x = 3$  és  $y = -2$ .

4. Ellenőrizzük a megoldást az  $x$  és  $y$  értékeinek az eredeti egyenletbe való behelyettesítésével!

$$\text{Pl.: } 6 - 6 = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{És } 9 - 4 = 5 \quad \checkmark$$

$6 - 6 = 0$  és  $9 - 4 = 5$ , tehát a megoldás helyes.

## Grafikus megoldás

Az egyenletrendszereket ábrázolhatjuk grafikonon is. (Erről bővebben a 82–86. oldalon olvashatsz.) Minden egyenes vagy görbe egy egyenletet szemléltet, és az a pont, ahol a két egyenes metszi egymást, olyan  $x$  és  $y$  koordinátájú, mely értékek mindkét egyenletet kielégítik.

### Egy egyenletrendszer grafikonjainak ábrázolása

Például a következő egyenletrendszer pontjainak ábrázolása:

$$x - 1 = y \quad 2y + 2x = 6$$

Rendezzük  $y$ -ra mindkét egyenletet:

$$y = x - 1 \quad y = 3 - x$$

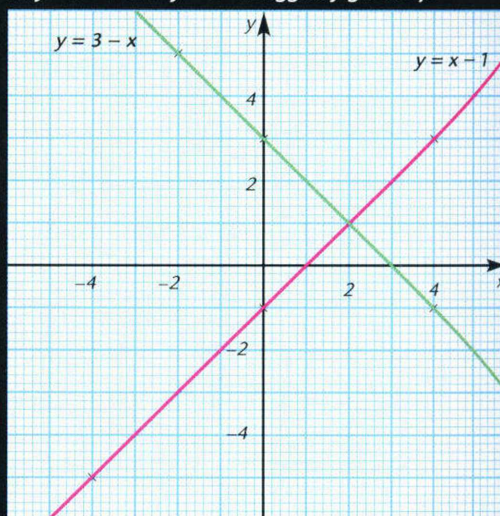
Mindkét egyenlethez készítünk értéktáblázatot  $x$  és  $y$  lehetséges értékeivel:

$x$	-4	0	4
$y = x - 1$	-5	-1	3

$x$	-2	0	4
$y = 3 - x$	5	3	-1

Jelöljük az így kapott koordinátákat, és kössük össze az összetartozó pontokat egy-egy egyenlőssel!

Az  $y = x - 1$  és az  $y = 3 - x$  függvény grafikonja



Ebben a példában az  $y = x - 1$  és az  $y = 3 - x$  egyenes a  $(2; 1)$  pontban találkozott, tehát az egyenletrendszer megoldása:  $x = 2$  és  $y = 1$ .



## Más egyenletrendszerek

### Első- és másodfokú egyenletrendszerek\*

Például oldjuk meg:

$$y = x + 3 \quad (1)$$

$$y = x^2 - 4x + 7 \quad (2)$$

Helyettesítsük be\*  $y$  értékét (1) a második egyenletbe (2), és hozzuk egyszerűbb\* alakra:

$$x + 3 = x^2 - 4x + 7$$

$$3 = x^2 - 4x + 7 - x$$

$$3 = x^2 - 5x + 7$$

$$0 = x^2 - 5x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Bontuk szorzattá\* az egyenletet, és megkapjuk  $x$  értékeit.

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$\text{tehát } x - 1 = 0 \quad \text{vagy } x - 4 = 0$$

$$\text{így: } x_1 = 1 \quad \text{vagy } x_2 = 4$$

Behelyettesítve  $x$  értékét az egyenletbe (1):

$$\text{Amikor } x = 1 \quad y = 1 + 3 \text{ vagyis } y = 4$$

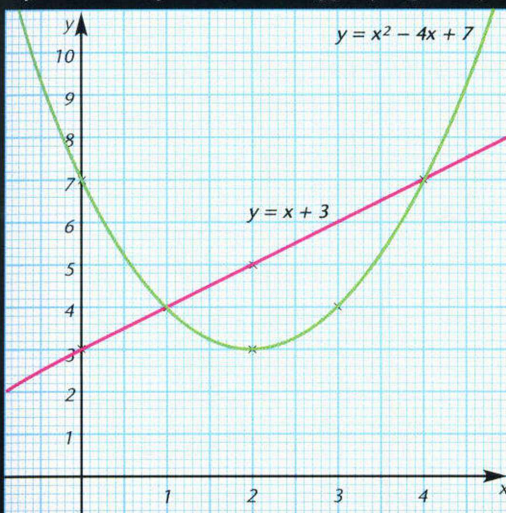
$$\text{Amikor } x = 4 \quad y = 4 + 3 \text{ vagyis } y = 7$$

Ellenőrizzük a megoldást a második egyenletbe való behelyettesítéssel (2):

$$4 = 1 - 4 + 7 \quad \checkmark \quad \text{és} \quad 7 = 16 - 16 + 7 \quad \checkmark$$

Ha az egyenletet nem sikerül szorzattá alakítani, próbáljuk teljes négyzetté alakítani, vagy írjuk fel a megoldóképletet! Grafikon segítségével is megoldhatjuk az egyenletrendszert. A metszéspont koordinátái\* adják az egyenletrendszer megoldásait.

Az  $y = x + 3$  és az  $y = x^2 - 4x + 7$  függvények grafikonjai



### Egyenes és kör

Például oldjuk meg:

$$y = x - 1 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 25 \quad (2)$$

Helyettesítsük be\*  $y$  értékét (1) a második egyenletbe (2), és hozzuk egyszerűbb alakra:

$$x^2 + (x - 1)^2 = 25$$

$$x^2 + (x - 1)(x - 1) = 25$$

$$x^2 + x^2 - x - x + 1 = 25$$

$$2x^2 - 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 - 2x - 24 = 0$$

Bontuk szorzattá\* az egyenletet, és megkapjuk  $x$  értékeit.

$$(2x + 6)(x - 4) = 0$$

$$\text{tehát } 2x + 6 = 0 \quad \text{vagy } x - 4 = 0$$

$$\text{így: } x_1 = -3 \quad \text{vagy } x_2 = 4$$

Behelyettesítve  $x$  értékét az egyenletbe (1):

$$\text{Amikor } x = -3 \quad y = -3 - 1 \text{ vagyis } y = -4$$

$$\text{Amikor } x = 4 \quad y = 4 - 1 \text{ vagyis } y = 3$$

Ellenőrizzük a megoldást a második egyenletbe való behelyettesítéssel (2):

$$(-3)^2 + (-4)^2 = 25$$

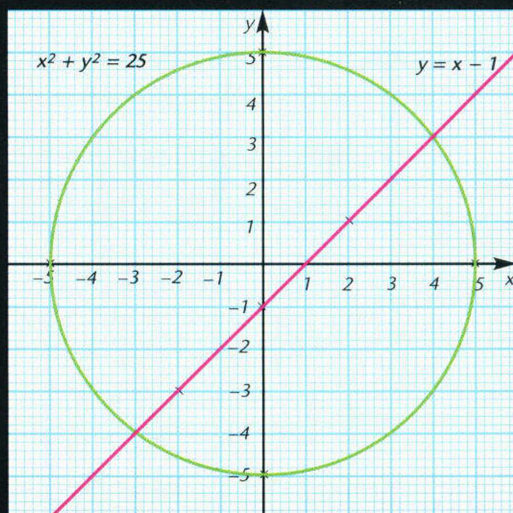
$$9 + 16 = 25 \quad \checkmark$$

$$\text{és } 4^2 + 3^2 = 25$$

$$16 + 9 = 25 \quad \checkmark$$

Ha az egyenletet nem sikerül szorzattá alakítani, próbáljuk teljes négyzetté alakítani, vagy írjuk fel a megoldóképletet! Grafikon segítségével is megoldhatjuk az egyenletrendszert. A metszéspont koordinátái\* adják az egyenletrendszer megoldásait. Emlékezzünk, hogy egy  $x^2 + y^2 = r^2$  alakban megadott egyenlet egy kör, melynek középpontja az origó (0;0) és sugara  $r$  (lásd a kör grafikonját a 84. oldalon).

Az  $y = x - 1$  és az  $x^2 + y^2 = 25$  függvények grafikonjai





# EGYENLŐTLENSÉGEK

Az **egyenlőtlenség** olyan matematikai állítás, melyben két algebrai kifejezés\* nem egyenlő. Az egyenlőtlenség az egyenlet\* ellentéte, de ugyanúgy kell megoldanunk, vagyis meg kell határoznunk azokat az értékeket, melyek igazgá teszik az egyenlőtlenséget.

## Az egyenlőtlenség jelölése

Az alábbi szimbólumokat használjuk az egyenlőtlenség kifejezésére:

$<$  jelentése: „kisebb, mint”

$>$  jelentése: „nagyobb, mint”

$\leq$  jelentése: „kisebb vagy egyenlő, mint”

$\geq$  jelentése: „nagyobb vagy egyenlő, mint”

$\neq$  jelentése: „nem egyenlő”

Például  $x < y$  azt jelenti, hogy az  $x$  kisebb, mint az  $y$ , és  $a \geq b$  azt jelenti, hogy az  $a$  nagyobb vagy egyenlő, mint a  $b$ .

Az egyenlőtlenség oldalait felcserélhetjük, de akkor a relációs jelet is meg kell fordítanunk. Például, ha  $x$  kisebb, mint  $y$  ( $x < y$ ), akkor az  $y$ -nak nagyobbnak kell lennie az  $x$ -nél ( $y > x$ ). Hasonlóan, ha  $a$  nagyobb vagy egyenlő  $b$ -nél ( $a \geq b$ ), akkor a  $b$ -nek kisebbnek vagy egyenlőnek kell lennie az  $a$ -nál ( $b \leq a$ ).

Az egyenlőtlenségeket ábrázolhatjuk számegyenesen\*. Azokat az értékeket, amelyek már beletartoznak az egyenlőtlenség megoldáshalmazába, tömör körrel jelöljük. Egy érték beletartozik, ha a változó\*  $\leq$  vagy  $\geq$  az adott értéknél.



Ez a számegyenes az  $x \geq 1$  egyenlőtlenséget ábrázolja. Az 1 már beletartozik az egyenlőtlenségbe, ezért tömör körrel jelöltük.

Azokat az értékeket, amelyek még nem tartoznak bele az egyenlőtlenség megoldáshalmazába, üres körrel jelöljük. Egy érték még nem tartozik bele, ha a változó\*  $<$  vagy  $>$  az adott értéknél.



Ez a számegyenes a  $-2 < x < 6$  egyenlőtlenséget ábrázolja. A  $-2$  és a  $6$  nem tartoznak bele az egyenlőtlenségbe, ezért üres körrel jelöltük őket.

$$2x + 3 < 8$$

Az egyenlőtlenség két oldalát relációs jel választja el. Többféle jelentéssel bíró relációs jel létezik. A fenti egyenlőtlenségben szereplő jelentés: „kisebb mint”.

## (Feltételes) egyenlőtlenség

Olyan egyenlőtlenség, amely csak a változó\* bizonyos értékeire teljesül, például  $x + 1 \geq 4$ , amely csak az  $x \geq 3$  értékekre teljesül.

## (Feltétel nélküli) mindig igaz egyenlőtlenség

Olyan egyenlőtlenség, amely a változó\* összes értékeire teljesül, például  $x + 1 > x - 1$ .

## Kettős egyenlőtlenség

Olyan egyenlőtlenség, amelyben a változónak\* két egyenlőtlenséget kell kielégítenie. Például a  $0 \leq x \leq 5$  kettős egyenlőtlenségben az  $x$ -nek 0-nál nagyobbnak vagy egyenlőnek, ugyanakkor 5-nél kisebbnek vagy egyenlőnek kell lennie.

## Egyszerű egyenlőtlenségek megoldása

Az egyenlőtlenségeket ugyanolyan módon oldjuk meg, mint az egyenleteket\*, kifejezzük az ismeretlent\*. Az egyenlőtlenség igaz marad, ha bármilyen kifejezést\* hozzáadunk vagy kivonunk mindkét oldalból. Hasonlóan, ha bármilyen pozitív kifejezéssel (számmal) megszorozzuk vagy elosztjuk az egyik oldalt, akkor ugyanezt kell tennünk a másik oldallal is. Ugyanakkor, ha egy negatív kifejezéssel osztjuk vagy szorozzuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát, akkor a relációs jelet is meg kell fordítanunk.

Például a következő egyenlőtlenség

$$\text{megoldása: } 4 - 3y \geq 12 - y$$

Vegyünk el 4-et mindkét oldalból:

$$-3y \geq 12 - y - 4$$

Adjunk hozzá  $y$ -t mindkét oldalhoz:

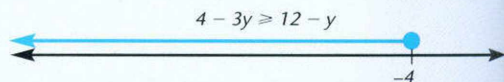
$$-3y + y \geq 12 - 4 \quad -2y \geq 8$$

Osszuk el mindkét oldalt  $-2$ -vel, és fordítsuk meg a relációs jel irányát:  $y \leq -4$

Az egyenlőtlenség megoldása

(megoldáshalmaza):  $y \leq -4$ .

A megoldáshalmazt ábrázolhatjuk számegyenesen:





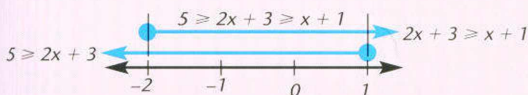
### Kettős egyenlőtlenség megoldása

A kettős egyenlőtlenséget két egyenlőtlenségre bontjuk, például a  $5 \geq 2x + 3 \geq x + 1$  helyett  $5 \geq 2x + 3$  és  $2x + 3 \geq x + 1$  lesz.

A mindkét egyenlőtlenséget kielégítő megoldáshalmaz meghatározásához oldjuk meg őket külön-külön:

$$\begin{array}{ll} 5 \geq 2x + 3 & 2x + 3 \geq x + 1 \\ 5 - 3 \geq 2x & 2x - x + 3 \geq 1 \\ 2 \geq 2x & x \geq 1 - 3 \\ 1 \geq x & x \geq -2 \end{array}$$

Azon  $x$  értékek elégítik ki mindkét egyenlőtlenséget, melyek  $-2$ -nél nagyobbak vagy egyenlők, és  $1$ -nél kisebbek vagy egyenlők. Ezt a megoldást felírhatjuk egy kettős egyenlőtlenséggel:  $-2 \leq x \leq 1$ , és számegyenesen is ábrázolhatjuk:



### Egyenlőtlenségek grafikonjai

Egy egyenlőtlenséget grafikusán\* egy terület ábrázol. Az egyenlőtlenség grafikonjának ábrázolása:

1. Helyettesítsük a relációs jelet egyenlőség-jellel ( $=$ ), és a kapott egyenletet ábrázoljuk. (Grafikonok ábrázolásáról bővebb információt a 80. oldalon találhatsz.) Például az  $x \leq 4$  egyenlőtlenség grafikonjához először jelöljük be azokat a koordinátákat\*, amelyek kielégítik az  $x = 4$  lineáris egyenletet\*.

2. Kössük össze a pontokat szaggatott vagy folytonos vonallal! A folytonos vonal azt jelenti, hogy az egyenes pontjai is beletartoznak az egyenlőtlenség megoldáshalmazába (azaz, ha  $\geq$  vagy  $\leq$  szerepel az egyenlőtlenségben). A szaggatott vonal azt fejezi ki, hogy az egyenes pontjai nem tartoznak hozzá a megoldáshalmazhoz (azaz, ha  $<$  vagy  $>$  szerepel az egyenlőtlenségben).

3. Hacsak nincs más kérdés, árnyékoljuk azt a területet, amely nem tartozik a megoldáshoz, és világosan feliratozzuk azt a területet, amely hozzátartozik a megoldáshalmazhoz!

4. Ha egy olyan értékalmazt kell megtalálnunk, amely több egyenlőtlenséget is kielégít, akkor az összes egyenlőtlenséghez tartozó egyenest rajzoljuk meg, és színezzük ki a nem kívánt területeket! Végül jelöljük (feliratozzuk) a megfelelő területet!

### Például: egy egyenlőtlenség-rendszer grafikus megoldása

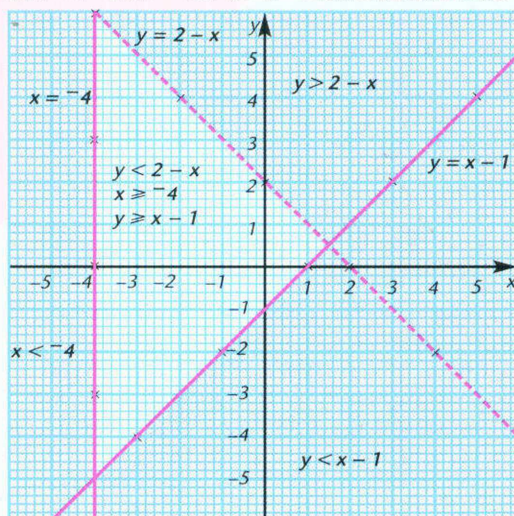
Keressük meg a következő egyenlőtlenségek által meghatározott területet:  $y < 2 - x$ ,  $x \geq -4$  és  $y \geq x - 1$ . A grafikon segítségével keressük meg azoknak a pontoknak a koordinátáit, ahol a  $3x + y$  értéke a) a legnagyobb és b) a legkisebb.

Készítsünk az  $y = 2 - x$  és az  $y = x - 1$  egyenletekhez értéktáblázatot, majd mindkét koordinátahalmazt ábrázoljuk grafikusán és kössük össze egyenes vonallal a pontokat.

$x$	-4	-2	0	2	4
$y = 2 - x$	6	4	2	0	-2

$x$	-3	-1	1	3	5
$y = x - 1$	-4	-2	0	2	4

Az  $y < 2 - x$ ,  $x \geq -4$  és  $y \geq x - 1$  függvények grafikonja



Az  $y < 2 - x$ ,  $x \geq -4$  és  $y \geq x - 1$  egyenlőtlenségek által meghatározott terület a nem árnyékolt rész.

A terület csúcspontjainak  $x$  és  $y$  értékei a legnagyobb vagy legkisebb értékek, amelyek még kielégítik az egyenlőtlenségeket. Az egyenlet legnagyobb és legkisebb értékének kiszámolásához helyettesítsük be a csúcsok koordinátáit az egyenletbe, és hasonlítsuk össze az eredményeket!

A  $(-4, -5)$  pontban:  $3x + y = -12 + -5 = -17$

A  $(-4, 6)$  pontban:  $3x + y = -12 + 6 = -6$

Az  $(1,5, 0,5)$  pontban:  $3x + y = 4,5 + 0,5 = 5$

a) A  $3x + y$  értéke a legnagyobb az  $(1,5, 0,5)$  pontban.

b)  $3x + y$  értéke a legkisebb a  $(-4, -5)$  pontban.

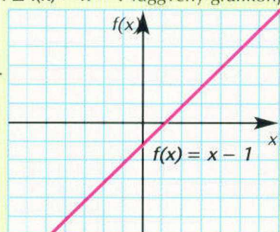




## Függvények és grafikonok

A függvényeket grafikonnal is ábrázolhatjuk, az **értelmezési tartomány** az  $x$  tengelyen\* (vízszintes), a **helyettesítési értékek** pedig az  $y$  tengelyen\* (függőleges) találhatók. Az  $y$  tengelyt jelölheted akár „ $y$ ”-nal vagy „ $f(x)$ ”-szel, mivel  $y = f(x)$ . Ha az  $y$  tengelyt „ $y$ ”-nal jelölöd, akkor a függvényt is így jelöld: „ $y = \dots$ ”; ha az  $y$  tengelyt „ $f(x)$ ”-szel jelölöd, akkor a függvényt is „ $f(x)$ ”-szel jelöld.

Az  $f(x) = x - 1$  függvény grafikonja



Minden függvény ábrázolható grafikonon, ami csak rá jellemző. Példákat a 81–84. és a 64. o.-on találhatsz.

### Lineáris függvény

Az összes  $f(x) = mx + b$  alakú függvény (ahol  $m$  nem lehet 0). (Lásd a 81–82. oldal grafikonjait!)

### Másodfokú függvény

Az összes  $f(x) = ax^2 + bx + c$  alakú függvény (ahol  $a$ ,  $b$  és  $c$  konstansok és  $a$  nem lehet 0). (Lásd a 82. oldal grafikonját!)

### Harmadfokú függvény

Az összes  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  alakú függvény (ahol  $a$ ,  $b$ ,  $c$  és  $d$  konstansok és  $a$  nem lehet 0). (Lásd a 83. oldal grafikonját!)

### Exponenciális függvény

Az összes  $f(x) = a^x$  alakú függvény (ahol  $a$  konstans). (Lásd a 84. oldal grafikonját!)

### Reciprokfüggvény

Az összes  $f(x) = \frac{a}{x}$  alakú függvény (ahol  $a$  konstans). (Lásd a 84. oldal grafikonját!)

### Racionális törtfüggvény

Az összes  $f(x) = \frac{a}{mx+b}$  alakú függvény (ahol  $a$  konstans és  $mx+b$  nem lehet 0).

### Körfüggvény

Az összes  $f(x) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  alakú függvény (ahol  $(a,b)$  a kör középpontjának koordinátái. A 84. oldalon látható egy egyszerű példa  $x^2 + y^2 = r^2$  formában, ahol  $r$  a kör sugara és  $(0,0)$  a kör középpontja.

### Trigonometrikus függvény

Az  $f(x) = \sin^*x$ ,  $f(x) = \cos^*x$  és  $f(x) = \operatorname{tg}^*x$  függvények. (Lásd a 64. oldal grafikonjait!)

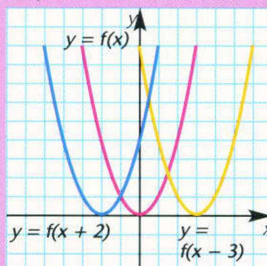
## Grafikonok transzformálása (függvénytranszformációk)

Miután ábrázoltuk egy függvény grafikonját, lehetőség van az ábra transzformációjára az átalakított hozzárendelés alapján.

Például az  $f(x)$ -et  $-f(x)$ -szel helyettesítve a grafikon tükrözzük az  $x$  tengelyre, és ha  $f(x)$  helyett az  $f(-x)$ -et veszünk, akkor az  $y$  tengelyre tükrözzük. Az alábbiakban 4 gyakori transzformációt mutatunk be.

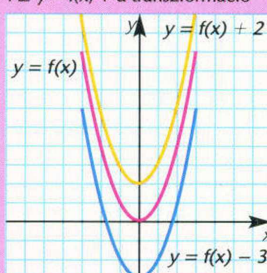
Az  $y = f(x + a)$  transzformáció

Az  $y = f(x+a)$  transzformációnál az  $x$  tengely mentén toljuk el a grafikont. Ha  $a > 0$ , akkor balra toljuk el (negatív irányba,  $a$  egységgel). Ha  $a < 0$ , akkor jobbra toljuk el (pozitív irányba,  $-a$  egységgel).



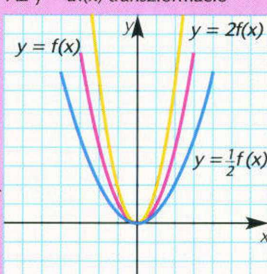
Az  $y = f(x) + a$  transzformáció

Az  $y = f(x)+a$  transzformációnál az  $y$  tengely mentén toljuk el a grafikont. Ha  $a < 0$ , akkor lefelé toljuk el (negatív irányba,  $-a$  egységgel). Ha  $a > 0$ , akkor felfelé toljuk el (pozitív irányba,  $a$  egységgel).



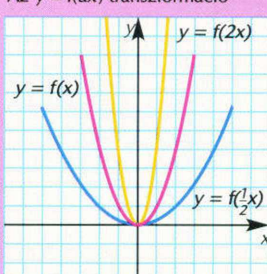
Az  $y = af(x)$  transzformáció

Az  $y = af(x)$  transzformációnál az  $y$  tengely mentén nyújtjuk szét a grafikont  $a$ -szorosára\*. Ha  $a > 1$ , akkor az  $y$  tengely mentén nyúlik a grafikon (az  $x$  tengelytől mért távolságok  $a$ -szorosra változnak). Ha  $a < 1$ , akkor az  $y$  tengely mentén húzzuk össze a grafikont („kövérebb lesz”).



Az  $y = f(ax)$  transzformációnál az  $x$  tengely mentén húzzuk szét vagy toljuk össze a grafikont  $\frac{1}{a}$ -szorosára\*. Ha  $a > 1$ , akkor az  $x$  tengely mentén zsugorodik a grafikon (az  $y$  tengelytől mért távolságok  $\frac{1}{a}$ -szorosra változnak). Ha  $a < 1$ , akkor az  $x$  tengely mentén nyúlik a grafikon („kövérebb lesz”).

Az  $y = f(ax)$  transzformáció





# A GRAFIKONOKRÓL LEOLVASHATÓ INFORMÁCIÓK

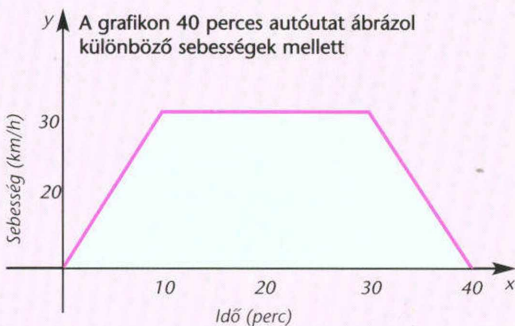
Mivel a grafikon két mennyiség közötti kapcsolatot ábrázol, használható egy  $y$  tengelyhez\* tartozó értéknek megfelelő  $x$  tengely\* menti érték leolvasására és fordítva. Ezenkívül a grafikon alatti terület\* és a grafikon meredeksége\* egyaránt hasznos információkkal szolgálhat az ábrázolt mennyiségekről.

## A grafikon alatti terület

Ha az  $x$  és  $y$  tengelyen használt mértékegységek ismertek, akkor a grafikon alatti terület adja a harmadik mértékegységet. Bármilyen a grafikon alatti rész alakja, a tengelyeken mért távolságok szorzata tartalmazza a grafikon alatti területet. Ezért a grafikon alatti terület kiszámítására általános képletet konstruálhatunk:

$$\text{Grafikon alatti terület} = \text{x tengelyen mért távolság} \cdot \text{y tengelyen mért távolság}$$

Például egy **sebesség-idő grafikonon** (egy grafikon, amely a sebességet mutatja az idő függvényében), amilyen az alábbi is, az  $y$  tengely mutatja a sebességet (a megtett út és az idő hányadosa), és az  $x$  tengely az időt.



Ha ezeket a mennyiségeket behelyettesítjük a képletbe, akkor a következőket kapjuk:

$$\text{A grafikon alatti terület} = \text{idő} \cdot \frac{\text{távolság}}{\text{idő}}$$

$$\text{A grafikon alatti terület} = \text{távolság}$$

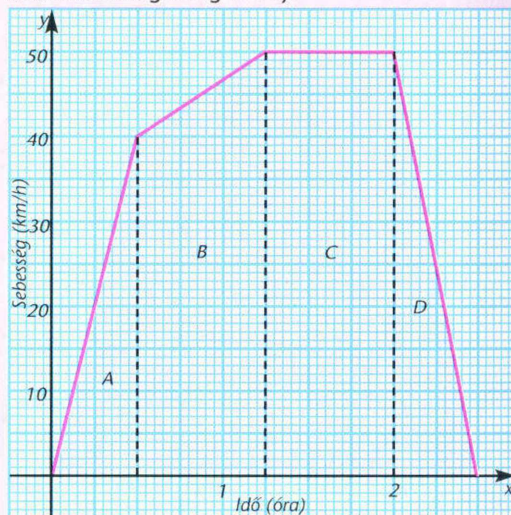
Tehát a grafikon alatti terület megadja a megtett út hosszát.

Ez a módszer más mennyiségek grafikonja alatti terület értelmezésében is használható. Például, ha az  $x$  tengely a sűrűséget\* (a tömeg\* és a térfogat\* hányadosa) és az  $y$  tengely a térfogatot jelenti, akkor a grafikon alatti terület a tömeget adja meg.

## Terület meghatározása lépcsős grafikon esetén

Alkalmazzunk közelítő módszert az alakzat területének meghatározására. Például az alábbi grafikon egy autó haladási sebességét mutatja. Mekkora utat tett meg összesen?

Az autó sebességének grafikonja



Osszuk fel a területet sokszögekre, és számítsuk ki külön-külön ezek területét!

Az A jelű háromszög területe:

$$\frac{1}{2} \cdot \text{alap} \cdot \text{magasság} = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 40 = 10 \text{ km}$$

A B jelű trapéz\* területe:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot (\text{a párhuzamos oldalak hosszának összege}) \\ & \cdot \text{ezek távolsága} \\ & = \frac{1}{2} \cdot (40 + 50) \cdot 0,75 = \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 0,75 = 33,75 \text{ km} \end{aligned}$$

A C jelű téglalap területe:

$$\text{hosszúság} \cdot \text{szélesség} = 0,75 \cdot 50 = 37,5 \text{ km}$$

A D jelű háromszög területe:

$$\frac{1}{2} \cdot \text{alap} \cdot \text{magasság} = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 50 = 12,5 \text{ km}$$

$$\text{Összesen} = 10 + 33,75 + 37,5 + 12,5 = 93,75 \text{ km}$$

Az összes megtett út tehát 93,75 km.



## Görbe alatti terület meghatározása

Osszuk fel a görbe alatti területet tetszőleges számú függőleges szakasszal, célszerű egyenlő távolságokban, és rajzoljuk be a keletkező szomszédos húrokat\*: így trapézokat kapunk. A trapézok területeinek összege közelítőleg meghatározza a görbe alatti területet. Ezt a módszert **trapézszabálynak** is mondják. Minél „vékonyabbak” a trapézok, annál pontosabb a közelítés.

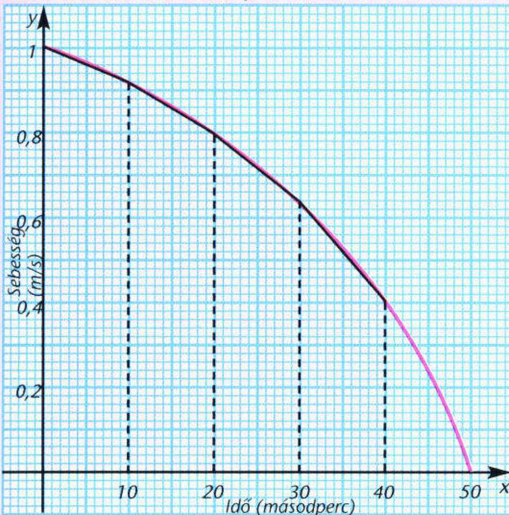
Ha a trapézok azonos szélességűek, akkor összevonhatjuk a területszámítást:

$$\text{terület} = \frac{1}{2} \cdot \text{szélesség} \cdot (\text{első} + \text{utolsó} + 2(\text{a maradékok összege})),$$

ahol az „első” az 1. trapéz bal oldali alapjának hosszát, az „utolsó” az utolsó trapéz jobb oldali alapjának hosszát, „a maradékok összege” pedig a köztük levő trapézok oldalait jelenti.

Például az alábbi grafikon egy felhúzó egér sebesség-idő-függvénye. Közelítőleg mekkora utat tesz meg az egér 40 másodperc alatt?

A felhúzó egér sebességének grafikonja



$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (1 + 0,4 + (2 \cdot (0,92 + 0,8 + 0,64))) \\ &= 5 \cdot (1,4 + 4,72) \\ &= 5 \cdot 6,12 = 30,6 \text{ m} \end{aligned}$$

A felhúzó egér 30,6 métert tesz meg 40 másodperc alatt.

Ha a grafikon alatti területet nem azonos szélességű trapézokra bontjuk, akkor minden egyes trapéz területét külön meg kell határoznunk, majd ezeket összegezni.

## Merekség és érintő

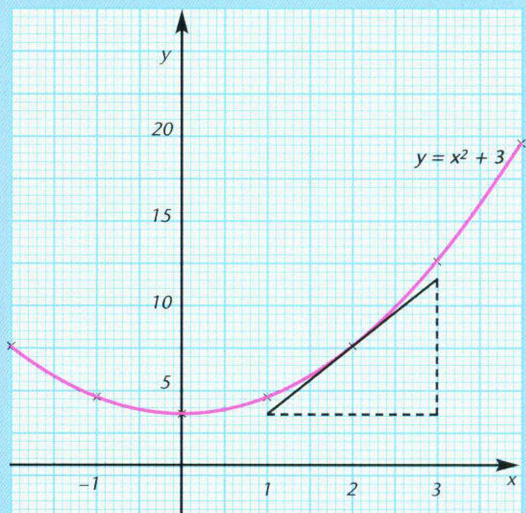
Egy grafikon merekségét úgy határozhatjuk meg, ha elosztjuk az  $y$  tengelyen mért távolságot az  $x$  tengelyen mért távolsággal. Ennek eredménye, a merekség újabb információt adhat az ábrázolt mennyiségek kapcsolatáról. Az alábbi táblázat néhány példát ad arra, hogy milyen információt jelenthet a merekség.

$y$ mennyiség	$x$ mennyiség	merekség jelentése
elmozdulás	idő	sebesség*
sebesség	idő	gyorsulás*
tömeg	térfogat	sűrűség*

Egy egyenes merekségét megkapjuk, ha a két pontja közötti függőleges távolságot elosztjuk a pontok közötti vízszintes távolsággal (lásd 80. oldal). Egy görbe merekségének meghatározásáról csak adott pontban beszélhetünk. Ebben a pontban érintőt húzunk a görbéhez, és ennek merekségét határozzuk meg.

Például keressük meg az  $y = x^2 + 3$  függvény merekségét az  $x = 2$  pontban: rajzoljuk meg  $x = 2$ -nél az érintőt! Ezt vonalzónkal rajzoljuk, forgassuk a vonalzónkat addig a görbe  $x = 2$  pontjában, amíg csak egy pontban nem érinti azt, és akkor rajzoljuk meg az érintőt!

Az  $y = x^2 + 3$  függvény grafikonja



Az érintő merekségének meghatározásához használjuk a következőt:

$$\frac{y - \text{koordináták különbsége}}{x - \text{koordináták különbsége}} = \frac{8}{2} = 4$$

Tehát az  $y = x^2 + 3$  függvény mereksége  $x = 2$  esetén 4.





# ADATOK

Az **adat** az információ elemeinek összefoglaló neve. Az adat vizsgált tulajdonságát ismérvnek hívjuk. A matematikának azt az ágát, amely az adatok gyűjtésével, rendezésével, osztályozásával, ábrázolásával és elemzésével foglalkozik, **statisztikának** nevezzük. (Nem a statisztikai sokaság egyedei fontosak, hanem a vizsgált tulajdonságok, azaz az ismérvek.)

## Adattípusok

### Mennyiségi adatok

Olyan információk (ismérvek), melyek mértéke számokkal kifejezhető. Ilyen például a hosszúság\*, a tömeg\* és a sebesség\*.

### Minőségi adatok

Olyan minőségi információk, melyeket számokkal nem lehet kifejezni. Ilyenek például a színek, illatok, ízek és formák.

### Diszkrét adatok

Olyan információk, melyeket csak speciális értékekkel fejezhetünk ki, például csak egész számmal. Egy csoportban található emberek száma például diszkrét adat, mivel csak pozitív egész számmal adható meg.

### Folytonos adatok

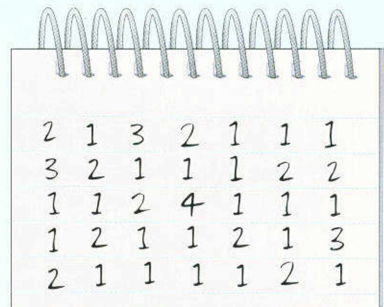
Egy adott határon (intervallumon) belül bármilyen értékkel kifejezhető információ. Ilyen például egy iskola tanulóinak magassága, hiszen ezek az adatok két egész érték között bármit felvehetnek. A hőmérséklet és az idő szintén folytonos adat.

### Rendezhető adatok

Olyan információk, melyek sorrendbe állíthatók, például 100 ember magassága, kora vagy jövedelme.

### Nem rendezhető adatok

Olyan információk, melyeket nem rendezhetünk sorba (szám szerint), például 100 ember neve, neme vagy születési helye.



2	1	3	2	1	1	1
3	2	1	1	1	2	2
1	1	2	4	1	1	1
1	2	1	1	2	1	3
2	1	1	1	1	2	1

Ez az adatlista egy adott napon délelőtt 10 és 10:15 óra között az iskolakapun áthaladó autókban ülő emberek számát tartalmazza. Az adat még nyers (sokaság): nincs feldolgozva.

### Elsődleges adatok

**Felmérés**, vizsgálat vagy tapasztalat útján gyűjtött információk. Például egy embercsoport megkérdezése vagy egy adott időszakban a napi hőmérséklet lejegyzése, egyaránt elsődleges adatgyűjtésnek tekinthető. Azokat az elsődleges adatokat, melyeket még nem rendeztünk, elemeztünk, **adatsokaságnak** nevezzük.

### Másodlagos adatok

Olyan információk, melyeket már összegyűjtöttünk, csoportosítottunk, például a piackutató társaságok által kiadott információk. Amint egy **elsődleges adatot** feldolgozunk, másodlagos adattá válik.

Utasok száma	1	2	3	4
Autók száma	21	10	3	1

A fenti táblázat egy adott napon délelőtt 10 és 10:15 óra között az iskolakapun áthaladó autókban ülő emberek számát tartalmazza. Ez már másodlagos adat, hiszen már rendezett, és könnyedén vonhatunk le következtetéseket, például, hogy a legtöbb autóban csak egy ember ült.

### Eloszlás

Gyakran a táblázat azt mutatja meg, hogy az egyes típusú adatokból hány darab van.

Dobott érték	1	2	3	4	5	6
A dobások száma	11	8	13	9	8	11

60 (kocka) dobás eredményének (kimenetelének) eloszlása

### Gyakoriság

Egy **eloszlásban** az adott szám (adat) előfordulásának száma.

Például a 12 9 11 12 5 12 sokaságban a 12 gyakorisága 3.



## Adatgyűjtés

Sokféle módon történhet az információ gyűjtése. A kutatás tárgyától függ, hogy melyik módszert választjuk. Bármelyiket is használjuk, figyelembe kell vennünk, hogy milyen **hibák, eltérések** adódhatnak, és meg kell terveznünk, hogy hogyan csökkentjük vagy küszöböljük ki ezeket.

### Eltérés

A valós eredményt befolyásoló tényező. Például, ha megkérdezzük 1000 városi embert, hogy melyik a legjobb futball-csapat, akkor a válasz nagymértékben függ attól, hogy melyik város lakóit kérdeztük.

### Megfigyelés

Az adatok megfigyeléssel, méréssel vagy számolással történő gyűjtése, amelyben az eredmények rögzítéséhez használhatunk magnót vagy videokamerát, vagy leírhatjuk egy megfigyelési táblázatba. A megfigyelés történhet úgy, hogy a megfigyelő nem vesz részt az eseményben vagy cselekvésben, azaz kívülálló, de lehet úgy is, hogy a megfigyelő aktívan közreműködik a megfigyelt kísérletben.

### Felmérés

Olyan eljárás, melyben egy populációs\* mintából\* gyűjtjük az ismérveket, és az egész populációra vonatkozó következtetéseket teszünk ez alapján. A felmérések gyakori formája a **kérdőív**.

### Írányított felmérés

Ezt a felmérést kis létszámú csoporton végzik, célja a módszerrel kapcsolatos problémák felderítése, tehát tökéletesíti a felmérést, mielőtt azt nagyobb skálán végeznénk.

### Népszámlálás

Egy hivatalos mérés, például a lakosság összetételére ad információt nem, kor és foglalkozás szerint.

### Interjú

Ez a módszer az adatokat a megkérdezettektől közvetlenül egyénenként vagy csoportosan gyűjti. A **hivatalos (szabályos) interjúban** a kérdések precíz szabály alapján készülnek. A **nem hivatalos interjúk** kérdései sokkal általánosabbak, lazább struktúrát követnek.

### Kérdőív

Egy formanyomtatványban összegyűjtött kérdéshalmaz, melyet bizonyos számú emberrel kitöltetnek azon célból, hogy egy adott témáról információt gyűjtsenek. **Méréses és minősítésses ismérvek** gyűjtésére egyaránt alkalmas. A jó kérdés egyszerű, pontos és egyértelmű (nem érthető félre a válaszadás szempontjából).

Gyakran segít, ha a lehetséges válaszokat korlátozzák. Az ilyen kérdéseket tartalmazó kérdőíveket könnyű elemezni és összehasonlítani. Például egy véleményt a következőképpen kérdezhetünk meg:

Legyen kötelező az iskolai egyenruha.

Egyetértek ☐ Nem értek egyet ☐ Nem tudom ☐

*Az alábbi kérdőív egy jégkrémárka eladásához készít felmérést. Általános információkat ad arról, hogy a megkérdezettek szeretik vagy nem szeretik az adott jégkrémet.*

#### Dairy Frosty jégkrém-kérdőív

A következő kérdések az Ön Dairy Frosty Minipots jégkrém-vásárlásaival kapcsolatosak az elmúlt évre vonatkozóan. Kérjük, minden kérdésnél jelölje meg a megfelelő választ!

1. Kóstolta már a Dairy Frosty Minipots jégkrémjét?

Igen ☐ Nem ☐

2. Melyik Dairy Frosty Minipots jégkrém ízlik Önnek a legjobban?

Epres ☐ Csokoládés ☐ Vaníliás ☐

3. Havonta körülbelül hány darab Dairy Frosty Minipots jégkrémet vásárol?

1-5 ☐ 6-10 ☐ 11-15 ☐ 15-nél többet ☐

4. Életkora?

18 évnél fiatalabb ☐ 18-30 ☐ 31-40 ☐

41-50 ☐ 51-60 ☐ 60 évnél idősebb ☐

5. Minden Minipothoz tartozzon egy kiskanál is.

Egyetértek ☐ Nem értek egyet ☐ Nem tudom (mindegy) ☐

*Köszönjük, hogy időt szentelt kérdőívünkre. Kérjük, a mellékelt válaszbörítékben küldje el címünkre!*

### Adatnapló

Ehhez a módszerhez számítógépre van szükség, mellyel mérjük és feljegyezzük a feltételekben keletkezett változásokat, például egy szoba hőmérsékletét. Az adatokat egy, a számítógéppel összekapcsolt érzékelő gyűjti. Ezek fizikai mennyiségeket mérnek, például hőmérsékletet vagy fényerőt, és az adatokat továbbítják a számítógépnek, amely egy **adatnapló-készítő szoftver** segítségével **adatnaplóban** rögzíti őket. Ez a program az adatok elemzésére és megjelenítésére (ábrázolására) is alkalmas.





## Mintavétel

Az egész halmaz\* egy részét **mintának** nevezzük. Gyakran túl drága vagy túl hosszadalmas lenne egy sokaság minden elemét megkérdezni egy felmérés során. Az ilyen esetekben **mintát** veszünk a sokaságból. A mintának az egész halmazra (sokaságra) jellemzőnek (reprezentatívnak) kell lennie, nem tartalmazhat eltérést\*. A minta kiválasztását **mintavételnek** hívjuk.

### Sokaság

Az egész halmaz, amelyből a mintát vesszük. Például, ha a minta 100 5–10 éves fiút tartalmaz, akkor a sokaság az összes 5–10 éves fiú.

### Egyszerű mintavétel

Könnnyen megkérdezhető minta, pl. barátok vagy család.

### Véletlen kiválasztásos mintavétel

Ebben az esetben feltesszük, az egész **sokaság** minden egyes eleme a kiválasztás során ugyanakkora eséllyel kerülhet be a kiválasztott mintába. Sokféleképpen végezhetjük ezt a módszert, például kihúzhatjuk egy kalapból a neveket, vagy a sokaság minden tagjához rendelünk egy számot, és számítógéppel sorsolunk.

A véletlen kiválasztásos mintavétel módszere azon alapul, hogy feltételezzük, hogy a sokaság **homogén**. Ez általában nem igaz, mégis az így meghatározott paraméter nem nagyon tér el az alapsokaság megfelelő adatától.

### Szisztematikus, véletlenszerű mintavétel

Ennél a módszernél abból a feltételezésből indulunk ki, hogy a kiválasztás véletlenszerűsége a bennünket érdeklő paraméter szempontjából gyakorlatilag nem változik, ha a minta kiválasztását olyan kritérium alapján szervezzük meg, mely a vizsgált paraméterre semmilyen hatással sincs. Például, ha a lakosságot életkor szerint sorba rendezzük, és ezután minden tizedik embert vizsgálunk. Ez a módszer kevésbé véletlenszerű, mint a **véletlen kiválasztásos módszer**.

### Arányos mintavétel

Ebben a módszerben a **populáció** különböző csoportjaiból választanak ki bizonyos szempontok alapján néhány embert. Például a minta tartalmaz 50 férfit és 50 nőt úgy, hogy mindkét csoport fele legyen szemüveges.

### Csoportos kiválasztásos mintavétel

Ennél a módszernél felosztják a **sokaságot** sok kisebb sokaságra. Ezek közül véletlenszerűen kiválasztanak néhány csoportot, és megvizsgálják a csoport elemeit (a fenti módszerek valamelyikével)! Egy csoportos kiválasztásos minta jobban reprezentálja a sokaságot, ha a minta minden csoportjának elemszáma arányos\* az egész sokaság elemszámával.

Például válasszunk ki egy 50 fős csoportos mintát 3 év csoportjából, melyek egyenként 126, 105 és 119 főből állnak. Alkalmazzuk a következőt!

$$\text{Az egyes csoportok elemszáma} = \frac{\text{csoport}}{\text{sokaság}} \cdot \text{az egész minta elemszáma}$$

Példánkban a sokaság a három év csoportjainak összlétszáma.

$$\text{Sokaság} = (126 + 105 + 119) = 350$$

$$\text{első korcsoport 1} = \frac{126}{350} \cdot 50 = 18$$

$$\text{második csoport 2} = \frac{105}{350} \cdot 50 = 15$$

$$\text{harmadik csoport 3} = \frac{119}{350} \cdot 50 = 17$$

Tehát a csoportos minta 18 főt tartalmaz az első korcsoportból, 15 főt a másodikból és 17-et a harmadikból.

### Többlépcsős mintavétel

Ez a mintából kiválasztott minta módszere. Például, ha a minta az 50 év feletti embereket tartalmazza, akkor az újabb mintába az 50 év feletti nőket választjuk az előző csoportból.

### Rétegzett mintavétel

Ennél a módszernél sok, a vizsgált paramétert befolyásoló tényezőt vesznek figyelembe, amelyek eloszlása ismert a **sokaságban**. A mintát úgy állítják össze, hogy ezek a tényezők pontosan ugyanolyanok legyenek, mint az alapsokaságban, azaz a minta ugyanolyan módon legyen rétegzett, mint az alapsokaság. Például minden egyes iskolatípus egy réteg, és a kiválasztott iskola minden tagja beletartozhat a mintába.

### Mintavételi hiba

Egy mintából gyűjtött adat, illetve az alapsokaság egy adata közti eltérés. Például egy, a legnépszerűbb macskaeledelekről készített felmérés\* más eredményt hozhat egy helysége nézve, mint egy egész országot tekintve.



## Adatrögzítés

### Adatlista

Az adatokat egymás után felírjuk, ahogy jönnek (lásd a 96. oldal ábráját!). Az adatlistát rendeznünk kell, mielőtt bármilyen következtetést levonnánk belőle.

### Strigulázás

Minden adatnál egy vonalat húzunk, ezt **strigulának** nevezzük. Ötösével csoportosítjuk a jeleket (III I), így könnyebb összeszámolni.

### Gyakorisági táblázat

Megmutatja, hogy melyik adatból mennyi van az adott ismérvnek megfelelően.

*Ez a táblázat az egy óra alatt eladott fagyaltok számát mutatja, mely a strigulázással készült.*

jégkrém	strigulák	gyakoriság
vanília	III II	7
csokoládé	III III	8
eper	III III	10

### Kumulált( összegzett) gyakorisági táblázat

Ha az értékeket az időben való megjelenéseik szerint még összegezzük is, akkor **kumulált gyakoriságról** beszélünk.

Az utazás hossza (perc)	Gyakoriság	Kumulált gyakoriság
1–10	7	7
11–20	8	7 + 8 = 15
21–30	10	15 + 10 = 25

*A végső kumulált gyakoriság megegyezik a minta elemszámával.*

### Többscellás (kontingencia) táblázat

A táblázat minden egyes sora és oszlopa összekapcsolja az egyes kategóriákat.

*Ez a kétszellés táblázat az egy osztályba járó fiúk és lányok kedvenc sportágait ábrázolja.*

	futball	úszás	tenisz
fiúk	8	5	3
lányok	4	6	5

### Számítógépes adatbázis-kezelők

Ezek olyan számítógépes programok, melyek képesek nagy mennyiségű adatok tárolására és rendezésére. Számos adatbázis-kezelő képes diagramokat\* készíteni az adatok ábrázolására, pl. oszlopdiagramot, és statisztikai számításokat végezni, pl. középértékeket\*.

### Csoportos gyakorisági eloszlás-táblázat

Ebben a táblázatban megtalálható egy csoport adatainak vagy értékeinek előfordulási száma (**csoportos gyakoriság**). A csoport gyakoriságáról készített teljes listát mondjuk **csoportos gyakorisági eloszlásnak**.

Távolság (mértföld)	strigulák	gyakoriság
5 alatt	III I	6
6–10	II	2
11–20	III III	9
21–30	I	1
30 felett	II	2

*Ez a táblázat megmutatja, hogy egy cég dolgozói milyen messze laknak munkahelyüktől. A csoportos gyakorisági eloszlás megmutatja, hogy a mintából a legtöbb ember (9-en a 20-ból) 11 és 20 mérföld közötti távolságra lakik a hivataltól.*

### Intervallumosztály

A csoportos gyakorisági eloszlás-táblázat egy csoportja vagy kategóriája.

Például a fenti táblázatban az első intervallumosztály az „5-nél kevesebb”. Az intervallumosztályok legalsó és legfelső értékeit **osztályhatároknak** hívjuk. Például a 6–10 intervallumosztály **alsó határa** a 6, **felső határa** pedig a 10.

### Osztályhatár

Két intervallumosztály közötti határ. Az osztályhatárt úgy kapjuk meg, ha az egyik intervallumosztály **felső határát** hozzáadjuk a következő intervallumosztály **alsó határához**, majd az összeget elosztjuk 2-vel. Például a 11–20 és a 21–30 intervallumosztályok határa 20,5 (azaz  $20 + 21 : 2$ ). Az **alsó osztályhatár** elválaszt egy intervallumosztályt az öt megelőzőtől. A **felső osztályhatár** elválaszt egy intervallumosztályt az öt követőtől.

### Osztályszélesség, osztályhosszúság vagy osztályméret

Egy osztályintervallum esetén a **felső** és **alsó osztályhatár** különbsége. Például a 21–30 intervallumosztály szélessége 10 (azaz  $30,5 - 20,5$ ).

### Intervallum-középérték vagy középpont

Az intervallumosztály középső értéke. Kiszámításához adjuk össze az **alsó** és **felső intervallumhatárokat** vagy **osztályhatárokat**, és osszuk el kettővel! Például a 11–20 intervallumosztály középértéke 15,5, akár az intervallumhatárokkal számolunk:  $(11 + 20) : 2$ , akár az osztályhatárokkal:  $(10,5 + 20,5) : 2$ .





# KÖZÉPÉRTÉKEK

A **középérték** adat, amely adathalmazt\* képvisel. A középértékeket időnként **központi irányértéknek** vagy **átlagértéknek** is szokták nevezni.

A középértékeknek három alapvető típusát különböztethetjük meg: a móduszt, a mediánt és a számított középértékeket.

## Egy eloszlás módusza

Az eloszlásban\* leggyakrabban előforduló érték vagy értékek. Például, ha percben mérjük, hogy 10 ember külön-külön mennyi idő alatt töltött ki egy tesztet: 30 31 32 32 35 36 36 36 37 40

A 36 szerepel ebben az eloszlásban a legtöbbször, tehát a **módusz** 36.

## Kétmódusú eloszlás

Olyan eloszlás\*, melynek két **módusza** van. Például a következő eloszlásban a 32 és a 36 egyaránt kétszer fordul elő:

30 31 32 32 35 36 36 39

Ez azt jelenti, hogy a 32 és a 36 is **módusz**.

Ha egy eloszlásnak 3 vagy több módusza van, akkor azt **többszörös módusú eloszlásnak** nevezzük.

## A gyakorisági eloszlás módusza

A gyakorisági eloszlás\* móduszának meghatározása megegyezik a legnagyobb gyakoriságú\* elem megtalálásával.

Zokniméret	Gyakoriság	Ez a táblázat egy áruházban az egy hónap alatt eladott különböző méretű zoknik gyakoriságát mutatja. A gyakorisági táblázatból leolvasható, hogy a leggyakoribb értékhez (429) tartozó kategória a közepes, tehát az eloszlás módusza a közepes.
Kicsi	98	
Közepes	429	
Nagy	342	
Extra nagy	131	

## Móduszcsoport vagy móduszosztály

A leggyakrabban előforduló intervallumosztály\* csoportos gyakorisági eloszlásban\*.

Idő (perc)	Gyakoriság	Ez a táblázat megmutatja, hogy egy adott napon hány percig várt a buszra 50 utas személyenként. A móduszcsoport a 6–10 perc, mivel ennek a legnagyobb a gyakorisága.
1–5	10	
6–10	25	
11–15	10	
16–20	5	

## Egy eloszlás mediánja

A sorba rendezett eloszlás\* középső értéke. A **medián** sorszámanak meghatározásához használható az alábbi képlet:

$$\text{medián} = \frac{1}{2}(n + 1)$$

ahol  $n$  az értékek száma.

Például határozzuk meg a következő eloszlás mediánját:

4 3 1 8 5 2 1 6 12

1. Rendezzük növekvő sorrendbe az eloszlást:

1 1 2 3 4 5 6 8 12

2. Számítsuk ki a medián sorszámt!

$$\text{medián} = \frac{1}{2}(n + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(9 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

3. Keressük meg a sorszámnak megfelelő értéket, ez jelen esetben az 5. elem:

1 1 2 3 4 5 6 8 12

Tehát az eloszlás mediánja a 4.

Ha páros elemszámú az eloszlás, akkor a medián sorszáma a két középső között félúton van.

1 1 2 3 4 5 5 6 8 12

A medián számításához a két középső érték összegét osztjuk 2-vel:

$$\text{medián} = \frac{4 + 5}{2} = 4,5$$

Tehát az eloszlás **mediánja** 4,5.

## A gyakorisági eloszlás mediánja

A gyakorisági eloszlás\* **mediánjának** meghatározásához először ki kell számolnunk az eloszlás kumulált gyakoriságát\*. Ezután kiszámoljuk a medián sorszámt, majd meghatározzuk az ennek megfelelő értéket.

Ha a medián sorszáma 0,5-del több a kumulatív gyakoriságnál, akkor adjuk össze az előzőhöz és következőhöz tartozó értékeket, és az összeget osszuk el 2-vel! Az alábbi példában a medián sorszáma 25,5 (azaz  $(50 + 1) : 2$ ). A 0,5-et levonva 25-t kapunk, ez a kumulatív gyakoriság, tehát a medián értéke 7,5 (azaz  $(7 + 8) : 2$ ).

Érték	Gyakoriság	Kumulált gyakoriság
6	12	12
7	13	12 + 13 = 25
8	14	25 + 14 = 39
9	11	39 + 11 = 50

## Csoportos gyakorisági eloszlás mediánja

Csoportos gyakorisági eloszlás **mediánját** úgy találhatjuk meg, ha leolvassuk a medián sorszáamához tartozó értéket a kumulált gyakorisági\* diagramról (lásd 109. oldal).



**Egy eloszlás átlaga vagy számtani közepe**

Az adat általános méretének mértéke. Az átlag meghatározásához használjuk az alábbi szabályt:

$$\text{átlag} = \frac{\sum \text{értékek}}{\text{értékszám}}$$

ahol a szigma görög betű,  $\Sigma$ , összegzést\* jelent. Például számoljuk ki a következő eloszlás átlagát:

0 5 7 6 2 10

alkalmazzuk a képletet:

$$\frac{(0 + 5 + 7 + 6 + 2 + 10)}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Az eloszlás átlaga 5.

Az átlag meghatározására szolgáló szabályt írhatjuk így is:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

ahol  $\bar{x}$  az átlag,  $x$  az értékhalmaz,  $n$  pedig az elemek száma.

**A gyakorisági eloszlás átlaga**

A gyakorisági eloszlás átlagát úgy számoljuk ki, hogy először összegezzük\* az értékek ( $x$ ) és a hozzá tartozó gyakoriságok ( $f$ ) szorzatát, majd alkalmazzuk a következőt:

$$\text{átlag} = \frac{\sum \text{értékek}}{\text{értékszám}}$$

Például az alábbi gyakorisági táblázat egy csoport egyetemista által – egyénenként – az 1 hónap alatt elolvasott könyvek számát tartalmazza. Az átlag kiszámításához először összegezzük az értékeket a fentiek szerint!

Könyvek száma ( $x$ )	Gyakoriság ( $f$ )	gyakoriság x érték ( $fx$ )
0	1	$1 \cdot 0 = 0$
1	2	$2 \cdot 1 = 2$
2	0	$0 \cdot 2 = 0$
3	1	$1 \cdot 3 = 3$
4	1	$1 \cdot 4 = 4$
5	2	$2 \cdot 5 = 10$
6	0	$0 \cdot 6 = 0$
7	1	$1 \cdot 7 = 7$
	$\Sigma f = 8$	$\Sigma fx = 26$

Végül számoljuk ki az átlagot:

$$\text{átlag} = \frac{\sum \text{értékek}}{\text{értékszám}} = \frac{26}{8} = 3,25$$

Tehát ennek a gyakorisági eloszlásnak 3,25 könyv az átlaga. Az átlag értékének nem kell egész számnak lennie, még diszkrét\* adatoknál sem.

**A csoportos gyakorisági eloszlás átlaga**

A csoportos gyakorisági eloszlás átlagát úgy számoljuk ki, hogy meghatározzuk minden intervallumban a középpértéket ( $x$ ), és összeszorozzuk a gyakorisággal ( $f$ ). Végül összeadjuk a szorzatokat, majd használjuk a következőt:

$$\text{átlag} = \frac{\sum \text{értékek}}{\text{értékszám}}$$

Ezzel a módszerrel diszkrét\* és folytonos\* adatok esetén is meghatározható az átlag. Amennyiben a csoportos gyakorisági eloszlás konkrét értékei nem ismertek, akkor az átlag számolásához az intervallumközepet használjuk, ami maga is egy átlag. Ebből kifolyólag csoportos gyakorisági eloszlás átlaga csak közelítés (becslés) lehet. Például az alábbi csoportos gyakorisági eloszlás-táblázat\* egy általános műveltségi teszt eredményeit tartalmazza 60 résztvevő esetén.

elért pont szám	intervallum-középérték ( $x$ )	gyakoriság ( $f$ )	intervallum-középérték x gyakoriság ( $xf$ )
0–10	5,0	1	$5,0 \cdot 1 = 5,0$
11–20	15,5	2	$15,5 \cdot 2 = 31$
21–30	25,5	4	$25,5 \cdot 4 = 102$
31–40	35,5	3	$35,5 \cdot 3 = 106,5$
41–50	45,5	9	$45,5 \cdot 9 = 409,5$
51–60	55,5	14	$55,5 \cdot 14 = 777$
61–70	65,5	12	$65,5 \cdot 12 = 786$
71–80	75,5	9	$75,5 \cdot 9 = 679,5$
81–90	85,5	5	$85,5 \cdot 5 = 427,5$
91–100	95,5	1	$95,5 \cdot 1 = 95,5$
		$\Sigma f = 60$	$\Sigma fx = 3419,5$

A teszten elért pontok átlagának becsléséhez használjuk a következőt:

$$\text{átlag} = \frac{\sum \text{értékek}}{\text{értékszám}}$$

$$= \frac{3419,5}{60}$$

$$= 56,99 \text{ (2 tizedes pontossággal)}$$

A teszten elért pontszámok átlaga kb. 57.





# SZÓRÁSI MUTATÓK

A **szórás** vagy **szóródás** azt mutatja meg, hogy az adathalmaz mennyire terül szét (szóródik\*). Sokféle módszer létezik a szórás leírására. Ezeket mind szórási mutatóknak nevezzük, és ezek mind különböző típusú információkat adnak az **adathalmaz szórásáról**.

## Terjedelem

Egy eloszlás\* **terjedelme** a legnagyobb és legkisebb érték közötti különbséget jelenti (egy konkrét érték).

A terjedelem meghatározásához a következő képletet használjuk:

$$\text{Terjedelem} = \text{legnagyobb érték} - \text{legkisebb érték}$$

Például a következő eloszlás terjedelmének meghatározásához vonjuk ki a legkisebb értéket a legnagyobból:

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 10 & 3 & 7 & 11 & 5 & 3 & 9 & 6 \\ \text{terjedelem} & = & 11 & - & 2 & = & 9 \end{array}$$

A csoportos gyakorisági eloszlás terjedelmét úgy határozzuk meg, hogy a lehetséges legnagyobb értékből kivonjuk a lehetséges legkisebbet. Például, ha az első csoport 0–5 és az utolsó 46–50, akkor a terjedelem 50 lesz (50–0).

### Eloszlások összehasonlítása

Abban, hogy többet tudjunk meg az eloszlásokról, segíthet, ha összehasonlítjuk terjedelmüket és átlagaikat\*. Például ez a táblázat két nyugdíjasotthon lakóinak életkorát tartalmazza:

	Bíbor	Őszike
Bíbor	67 72 99 69 81 63 102	553
Őszike	77 78 82 79 78 80 79	553

Mindkét otthonban az életkorok átlaga 79 év (azaz 553 : 7). Viszont a Bíborban az életkorok terjedelme 35 év (102–67), míg az Őszikében csak 5 év (82–77). Ez azt mutatja, hogy bár az életkorok átlaga azonos mindkét otthonban, a terjedelem Bíborban sokkal nagyobb (statistikailag különböznek).

## Kvartilisek

**Alsó kvartilis** vagy **első kvartilis** ( $Q_1$ )

Egy növekvő sorrendbe rendezett eloszlás\* első negyedénél található érték. A  $Q_1$  helyének meghatározására használjuk a következőt:

$$\text{Alsó kvartilis-pozíció (sorszám)} = \frac{(n+1)}{4},$$

ahol  $n$  az eloszlás elemszáma, vagy a gyakorisági\* vagy csoportos gyakorisági eloszlás\* kumulatív gyakorisága\*.

**Felső kvartilis** vagy **harmadik kvartilis** ( $Q_3$ )

Egy növekvő sorrendbe rendezett eloszlás\* harmadik negyedénél található érték. A  $Q_3$  helyének meghatározására használjuk a következőt:

$$\text{Felső kvartilis-pozíció (sorszám)} = \frac{3(n+1)}{4},$$

ahol  $n$  az eloszlás elemszáma, vagy a gyakorisági\* vagy osztályközös gyakorisági eloszlás\* kumulatív gyakorisága\*.

Az olyan esetekben, amikor a kvartilisek sorszáma tizedestört, vagy gyakorisági\* vagy csoportos gyakorisági eloszlás\* esetén, úgy határozhatjuk meg a kvartiliseket, hogy megrajzoljuk a kumulatív gyakorisági diagramot,\* és leolvassuk a kvartilisek értékét a kvartilis pozícióknál.

**Interkvartilis terjedelem** (IT)

Az eloszlás\* középső 50%-ának terjedelme, amely kiküszöböli az eloszlás mindkét végén található extrém értékeket. Az interkvartilis terjedelmet a következőképpen határozzuk meg:

$$\text{IT} = \text{felső kvartilis} - \text{alsó kvartilis}$$

Például határozzuk meg az alábbi eloszlás interkvartilis terjedelmét:

2 4 5 7 7 9 12 15 16 16 18

1. Először az **alsó kvartilis-pozíciót** számoljuk ki:

$$\frac{n+1}{4} = \frac{11+1}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Az eloszlás harmadik értéke az 5, tehát az alsó kvartilis az 5.

2. Számoljuk ki a **felső kvartilis-pozíciót**:

$$\frac{3(n+1)}{4} = \frac{3 \cdot (11+1)}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

Az eloszlás kilencedik eleme a 16, tehát a felső kvartilis a 16.

3. Helyettesítsük be a képletbe a felső és alsó kvartilis értékét ( $16 - 5 = 11$ )! Tehát az eloszlás interkvartilis terjedelme 11.



## Standard eltérés

(Tapasztalati vagy empirikus szórás)

Az átlagtól\* való standard eltérés, gyakran csak **standard eltérés**, azt mutatja meg, hogy az eloszlás elemei mennyire szóródnak az átlaghoz képest. A tapasztalati szórás az eloszlás\* valamennyi értékét figyelembe veszi, míg a **terjedelem** és az **interkvartilis terjedelem** nem. Egy magas tapasztalati szórás-érték azt jelenti, hogy az elemek nagyon eltérőek, míg az alacsony azt jelenti, hogy egymáshoz közeleiek. A tapasztalati szórás az eredeti adathalmazról reális eredményt ad. Jele a görög kis szigma:  $\sigma$ .

### A tapasztalati szórás kiszámítása: 1. módszer

$$\text{Tapasztalati szórás } (\sigma) = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}},$$

ahol  $x$  az eloszlás egy-egy eleme,  $\bar{x}$  az eloszlás átlaga,  $n$  az összes érték száma és  $\Sigma$  az összegzés\* jele. Például az alábbi eloszlás egy társaság 8 alkalmazottjának eddig a társaságnál eltöltött éveinek számát tartalmazza:

1 5 6 3 2 10 7 6

A tapasztalati szórás számítása:

1. Számoljuk ki az eloszlás átlagát  $\bar{x}$ :

$$\begin{aligned} \text{átlag} &= \frac{\Sigma \text{értékek}}{\text{értékszám}} \\ &= \frac{(1 + 5 + 6 + 3 + 2 + 10 + 7 + 6)}{8} \\ &= \frac{40}{8} = 5 \end{aligned}$$

2. Minden egyes érték és az átlag különbségének számolása ( $x - \bar{x}$ ):

-4 0 1 -2 -3 5 2 1

3. A fenti értékeket emeljük négyzetre ( $(x - \bar{x})^2$ ):

16 0 1 4 9 25 4 1

4. Számítsuk ki a különbségek négyzetének átlagát:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n} \right) \\ &= \frac{16 + 0 + 1 + 4 + 9 + 25 + 4 + 1}{8} \\ &= \frac{60}{8} = 7,5 \end{aligned}$$

5. Vonjunk a fenti eredményből négyzetgyököt:

$$\begin{aligned} &\left( \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}} \right) \\ &= \sqrt{7,5} = 2,74 \end{aligned}$$

Tehát a tapasztalati szórás 2,74 év.

## A tapasztalati szórás kiszámítása:

### 2. módszer

$$\text{Tapasztalati szórás } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left( \frac{\Sigma x}{n} \right)^2},$$

ahol  $x$  az eloszlás egy-egy eleme,  $\bar{x}$  az eloszlás átlaga,  $n$  az összes érték száma és  $\Sigma$  az összegzés\* jele.

Például az alábbi eloszlás egy társaság 8 alkalmazottjának eddig a társaságnál eltöltött éveinek számát tartalmazza:

1 5 6 3 2 10 7 6

### A tapasztalati szórás kiszámítása:

1. Írjuk be az

értékeket egy táblázatba, és számoljuk ki minden  $x$ -re az  $x^2$ -et!

$x$	$x^2$
1	1
5	25
6	36
3	9
2	4
10	100
7	49
6	36
$\Sigma x = 40$	$\Sigma x^2 = 260$

2. Számítsuk ki az eloszlás értéknégyzeteinek átlagát:

$$\frac{\Sigma x^2}{n} = \frac{260}{8} = 32,5$$

3. Határozzuk meg az eloszlás átlagát, és emeljük négyzetre:

$$\left( \frac{\Sigma x}{n} \right)^2 = \left( \frac{40}{8} \right)^2 = 5^2 = 25$$

4. Határozzuk meg a tapasztalati szórás értékét úgy, hogy behelyettesítünk\* a képletbe\*:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left( \frac{\Sigma x}{n} \right)^2} \\ &= \sqrt{32,5 - 25} = \sqrt{7,5} = 2,74 \end{aligned}$$

Tehát a tapasztalati szórás 2,74 év.

### Szórásnégyzet

A tapasztalati szórás négyzete.

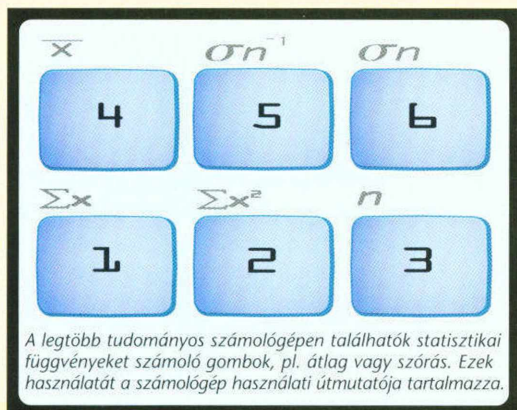
A szórásnégyzet előállítható a következő két képlettel\*:

$$\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n} \text{ vagy } \frac{\Sigma x^2}{n} - \left( \frac{\Sigma x}{n} \right)^2,$$

ahol  $x$  az eloszlás egy-egy eleme,  $\bar{x}$  az eloszlás átlaga,  $n$  az összes érték száma és  $\Sigma$  az összegzés\* jele.







### A csoportos gyakorisági eloszlás tapasztalati szórásának kiszámítása

Tekintsük minden egyes intervallumosztály\* középpontját  $x$ -nek, és használjuk a 103. oldalon leírt módszert a szórás kiszámítására! A tapasztalati szórás képletét egy kicsit át kell alakítani úgy, hogy vegye figyelembe azt, hogy minden egyes értéket összeszorozunk a hozzátartozó gyakorisággal.

Például az alábbi csoportos gyakorisági táblázat egy hivatal dolgozói által egy nap alatt fogadott telefonhívások számát tartalmazza. Készítsünk becslést a tapasztalati szórásra:

1. Számítsuk ki az csoportos gyakorisági eloszlás  $x$  értékeit, majd az  $fx$  és az  $fx^2$  értékeket:

hívások	$f$	$x$	$fx$	$fx^2$
1-5	9	3	27	$27 \cdot 3 = 81$
6-10	15	8	120	$120 \cdot 8 = 960$
11-15	13	13	169	$169 \cdot 13 = 2197$
16-20	3	18	54	$54 \cdot 18 = 972$
$\Sigma f = 40$		$\Sigma fx = 370$	$\Sigma fx^2 = 4210$	

2. Határozzuk meg a csoportos gyakorisági eloszlás négyzeteinek\* átlagát:

$$\frac{\Sigma fx^2}{n} = \frac{4210}{40} = 105,25$$

3. Számítsuk ki a csoportos gyakorisági eloszlás átlagát, és emeljük négyzetre:

$$\left(\frac{\Sigma fx}{n}\right)^2 = \left(\frac{370}{40}\right)^2 = 9,25^2 = 85,5625$$

4. Helyettesítsünk\* be a képletbe:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fx}{n}\right)^2} = \sqrt{105,25 - 85,5625} = \sqrt{19,6875} = 4,44$$

A tapasztalati szórás közelítőleg 4,44 hívás (3 jegy pontossággal).

### Cserék a tapasztalati szórásban

Ha az eloszlás\* minden egyes értékét csökkentjük (vagy növeljük) ugyanazzal az értékkel, akkor az átlag\* is ugyanennyivel csökken (vagy nő), de a szórás értéke változatlan marad.

Például az alábbi eloszlás átlaga 6, szórása 2,83.

2 4 6 8 10

Ha minden egyes értéket 3-mal csökkentünk, akkor ezt kapjuk:

-1 1 3 5 7

Az új eloszlás átlagát így számoljuk:

$$\frac{(-1 + 1 + 3 + 5 + 7)}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Az új eloszlás szórása:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(1 + 1 + 9 + 25 + 49)}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{85}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{17 - 9} = \sqrt{8} = 2,83 \end{aligned}$$

Vagyis az eloszlás átlaga 3-mal csökkent ( $3 + 3 = 6$ ), de a szórás mindkét eloszlásnál ugyanannyi (2,83).

Ha minden értéket szorzunk (vagy osztunk) ugyanazzal a számmal, akkor a szórás és az átlag is ugyanannyi szorosára (vagy ugyanannyi részére) változik.

Például az eredeti eloszlás minden értékét szorozzuk meg 2-vel:

4 8 12 16 20

Az új eloszlás átlaga:

$$\begin{aligned} & \frac{(4 + 8 + 12 + 16 + 20)}{5} \\ &= \frac{60}{5} = 12 \end{aligned}$$

Az új eloszlás szórása:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(16 + 64 + 144 + 256 + 400)}{5} - \left(\frac{60}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{880}{5} - 12^2} \\ &= \sqrt{176 - 144} = \sqrt{32} = 5,66 \end{aligned}$$

Az új eloszlás átlaga 2-szerese az eredeti átlagnak (azaz  $6 \cdot 2 = 12$ ), és a szórás is megduplázódott (azaz  $2,83 \cdot 2 = 5,66$ ).



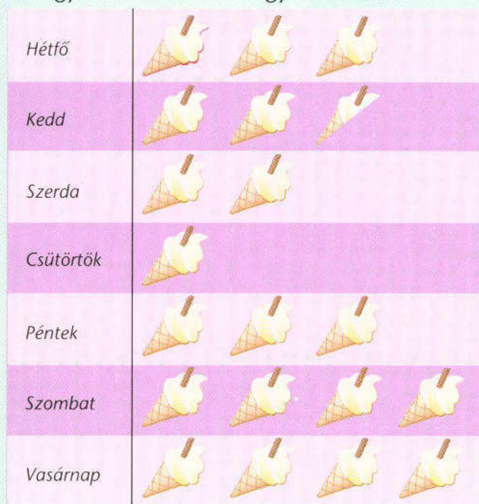
# ADATOK ÁBRÁZOLÁSA


Számos diagramot és grafikont használhatunk az adatok\* ábrázolására. Az, hogy éppen melyiket választjuk, attól függ, hogy mit szeretnénk megmutatni, mivel a különböző módszerek más-más információt (tulajdonságot) hangsúlyoznak.

## Piktogram

Ez olyan grafikon, amely képecskékkel (figurákkal) ábrázolja az eloszlás gyakoriságát. A piktogram tartalmaz címet és jelmagyarázatot, ami megadja a figurák jelentését. Egy ábra egy kisebb mennyiséget jelent.

Az egy hét alatt eladott fagyaltok száma



 = 2 jégkrém

Ha különböző szimbólumokat használunk, akkor azoknak azonos méretűeknek kell lenniük, ahogy sorakoznak a grafikonon. Az is segít, ha minden egyes figura ugyanannyi egyiséget jelöl. Így elkerülhetők a félreértések.

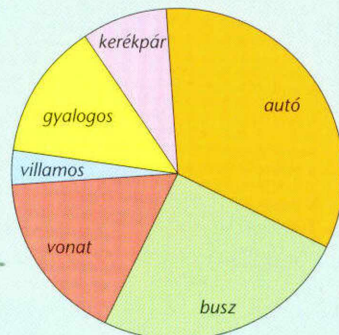


Ezek a képek azonos méretű és azonos számú egységeket jelölnek.

## Kördiagram

Ez a diagram körcikkek\* középponti szögeivel\* (vagy területével\*) ábrázolja az eloszlás gyakoriságát\*. A kördiagram címéből kiderül, hogy mit ábrázol, a feliratokból vagy a jelmagyarázatból pedig az, hogy az egyes szeletek mit jelentenek.

Hogyan mennek dolgozni egy társaság alkalmazottai



A megfelelő szögek mutatják a gyakoriságot. Ennek kiszámításához használjuk a következő képletet\*:

$$\text{középponti szög} = f \cdot \frac{360^\circ}{\Sigma f}$$

ahol  $f$  a gyakoriság.

Például az alábbi gyakorisági táblázat adatait ábrázoltuk a fenti kördiagramon.

Ebben a példában  $\Sigma f = 60$ , tehát egy

$$\text{középponti szög} = f \cdot \frac{360^\circ}{60} = f \cdot 6^\circ$$

közlekedési eszköz	gyakoriság	középponti szög
autó	20	$20 \cdot 6^\circ = 120^\circ$
busz	15	$15 \cdot 6^\circ = 90^\circ$
vonat	10	$10 \cdot 6^\circ = 60^\circ$
villamos	2	$2 \cdot 6^\circ = 12^\circ$
gyalogos	8	$8 \cdot 6^\circ = 48^\circ$
kerékpár	5	$5 \cdot 6^\circ = 30^\circ$
	$\Sigma f = 60$	$\Sigma \text{szög} = 360^\circ$

A szögek összegének\* mindig  $360^\circ$ -nak kell lennie! Időnként szükség lehet a szögek kerekítésére. Ha ezt tesszük, akkor egyes szögeket felfelé, másokat lefelé kerekítsünk! Használjuk a szögmérőt a kördiagram középpontjánál!

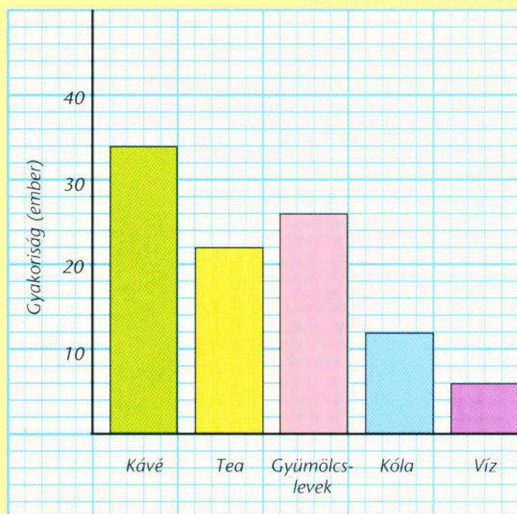




## Oszlopdiaagram

Az eloszlás\* gyakorisága\* azonos szélességű függőleges\* vagy vízszintes\* téglalapokkal ábrázoló grafikon. A cím megmutatja, hogy mit mutat az oszlopdiaagram, a tengelyeken\* található feliratok jelzik, hogy melyik tengely mit jelent, illetve, a beosztásokat. Van olyan oszlopdiaagram, amely diszkrét adatokat\* ábrázol, ilyenkor rések (szünetek) vannak a téglalapok között, és van folyamatos adatokat\* ábrázoló is, rések nélkül.

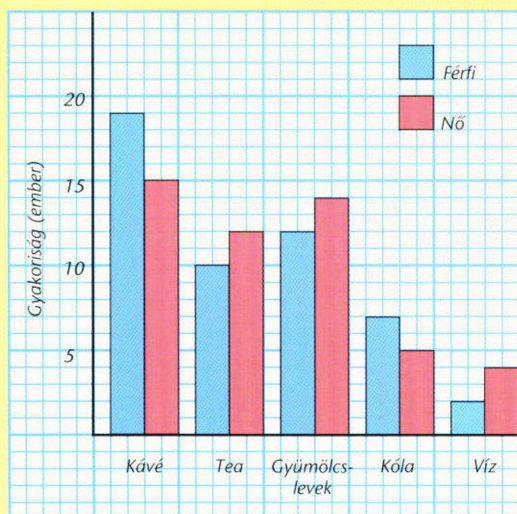
100 ember kedvenc itala



## Összetett oszlopdiaagram vagy többszörös oszlopdiaagram

Olyan oszlopdiaagram, amely több oszlopot is ábrázol egy kategórián belül, így egynél több adathalmaz elemeit jeleníti meg.

100 ember kedvenc itala

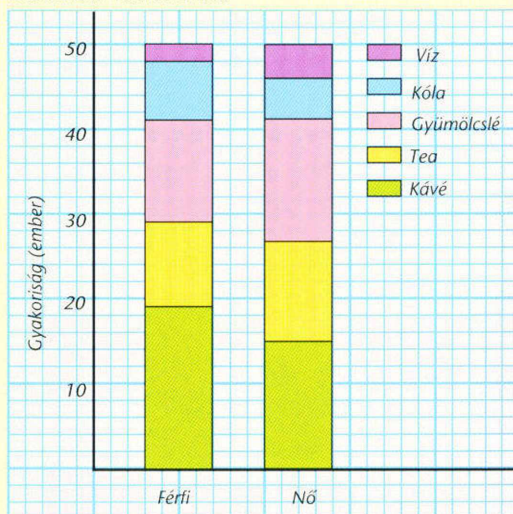


## Sávdiaagram

Olyan oszlopdiaagram, amelyben minden egyes oszlopot sávokra bontunk, ezzel ábrázolva több adathalmazt elemét.

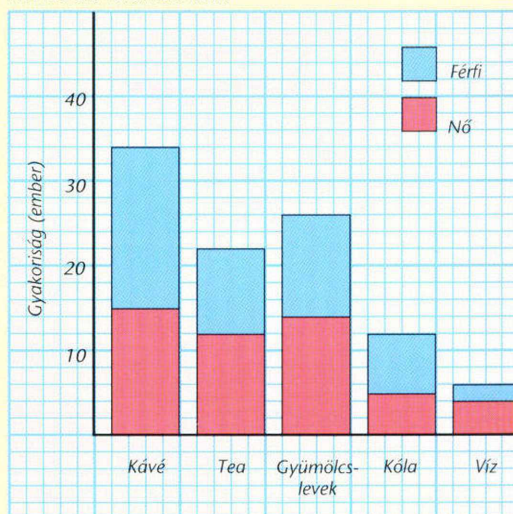
Például az alábbi sávdiaagram az előbbi összetett oszlopdiaagram adatait tartalmazza, az oszlopok egy-egy nemet képviselnek, a sávok pedig a kedvenc italokat jelentik.

100 ember kedvenc itala



Az alábbi sávdiaagram ugyanazt az információt mutatja, de ebben az esetben az oszlopok a különböző italokat képviselik férfi-nő sávbontásban.

100 ember kedvenc itala





## Hisztogram

Olyan **oszlopdiaagram**, amelyben az oszlopok területe\* arányos\* a csoportos gyakorisági eloszlás\* gyakoriságával\*. A hisztogram oszlopait az osztályhatárok alapján rajzoljuk. Minden egyes oszlop magasságát **gyakorisági sűrűségnek** mondjuk.

Egy csoportos gyakorisági eloszlás hisztogramjának megtervezéséhez először minden intervallumra ki kell számolni az osztályszélességet, aztán a következő szabály\* segítségével meghatározzuk a gyakoriság sűrűségét:

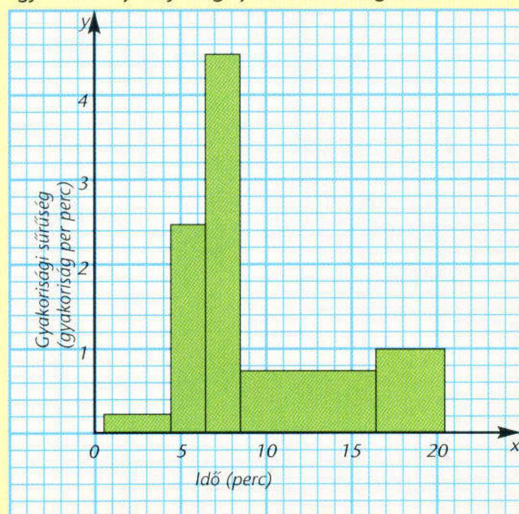
$$\text{gyakorisági sűrűség} = \frac{\text{gyakoriság}}{\text{osztályszélesség}}$$

Például az alábbi osztályközös gyakorisági-eloszlás-táblázat\* azt az időt mutatja, hogy 25 ember hány perc alatt fejtett meg egy keresztretjvényt (egyenként). Az idő folytonos adat\*, ezért a legközelebbi percre kerekítjük. Így a 0,5-5,5 percből 1-5 intervallumosztály lett, az osztályszélesség 5. A többi osztályszélesség is hasonlóan számoljuk.

Idő (perc)	Gyakoriság	Osztályszélesség	Gyakorisági sűrűség
1-4	1	4	$1 : 4 = 0,25$
4-6	5	2	$5 : 2 = 2,5$
7-8	9	2	$9 : 2 = 4,5$
9-16	6	8	$6 : 8 = 0,75$
17-20	4	4	$4 : 4 = 1$

Rajzoljuk meg a hisztogramot, megtervezve az osztályintervallumokat a gyakorisági sűrűség alapján. Osszuk fel a tengelyeket, és adjunk címet a diagramnak!

Egy keresztretjvény megfektetéséhez szükséges idő



## Gyakoriság számolása hisztogram alapján

Használjuk az alábbi szabályt, amely visszaalakítja a gyakorisági sűrűséget:

$$\text{gyakoriság} = \text{osztályszélesség} \cdot \text{gyakorisági sűrűség}$$

Ez ugyanaz, mintha a téglalapok területét számolnánk. Tehát a keresztretjvényfejtők összes ideje:

$$\begin{aligned} \text{gyakoriság} &= (4 \cdot 0,25) + (2 \cdot 2,5) + (2 \cdot 4,5) + \\ &\quad (8 \cdot 0,75) + (4 \cdot 1) \\ &= 1 + 5 + 9 + 6 + 4 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Az összes gyakoriság a táblázatban található gyakoriságok összege\*.

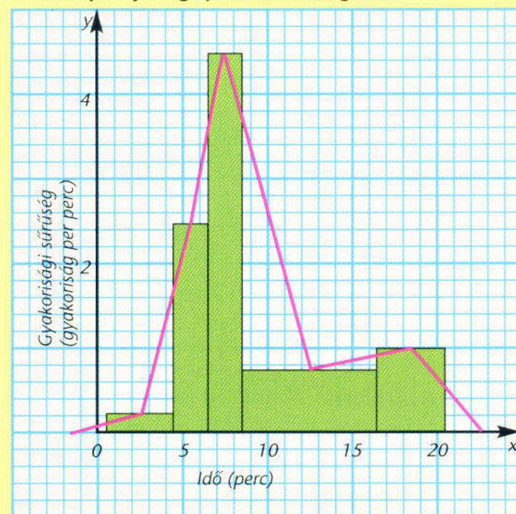
## Gyakorisági poligon (vonaldiagram)

A gyakoriságot\* (vagy gyakorisági sűrűséget) ábrázoló grafikonon az osztályintervallumok középintervallum-értékeit\* összekötő vonal.

Egy gyakorisági poligont megrajzolhatunk egy oszlopdiaagramban vagy hisztogramban úgy, hogy összekötjük az oszlopok tetejének középpontjait. A poligon alatti terület megegyezik a hisztogram alatti területtel.

Például az alábbi poligont a keresztretjvény megfektetéséhez szükséges időt ábrázoló hisztogramban (lásd balra) rajzoltuk meg.

Keresztretjvény megfektetéséhez szükséges idő





## Levéldiagram

Egy olyan adatábrázolási módszer, amely az eloszlás\* elemeit két részre osztja. Általában kevés számadatot\* (mennyiségi adatot) tartalmazó eloszlások terjedelmének\* és szórásának\* megjelenítésére használjuk. Például írjuk át az alábbi eloszlást levéldiagramba úgy, hogy a tízes helyi értéken található számjegyek alkotják a „törzs”-oszlopot (növekvő sorrendben), míg az egyesek helyén állók a „levél”-oszlopot (szintén növekvő sorrendben).

13 10 14 12 14 9 23 13 13 21

Törzs	Levelek
0	9
1	0 2 3 3 3 4 4
2	1 3

Kulcs: 2|3 jelenti a 23-at.

Általában a leveleket is növekvő sorrendben írjuk, különösen, ha a diagramot egyéb információk meghatározására is használjuk, mint pl. a módusz\*, a medián\* vagy a terjedelem\*.

Ha elfordítjuk az oldalt, akkor a levelek mintája olyan, mint egy oszlopdiagram\*, de az eloszlás minden egyes értékét leolvashatjuk (tehát előnyösebb).

A levéloszlopban minden szám egyjegyű kell, hogy legyen, de a gyökéroszlop tartalmazhat többjegyű számokat is. Például az alábbi eloszlást ábrázoló levéldiagram:

205 216 233 239 240 240 248

Törzs	Levelek
20	5
21	6
22	
23	3 9
24	0 0 8

Kulcs: 24|8 jelenti a 248-at.

A medián meghatározásához számoljuk a leveleket mindaddig, míg a medián sorszámához nem érünk. Például a fenti diagramban 7 levél van, tehát a medián sorszáma 4 (7 + 1 : 2).

A 4. érték a 9, tehát a medián a 239.

A módusz megtalálásához a leggyakrabban előforduló levelet kell megkeresnünk. Jelen esetben a módusz a 240.

A terjedelem 248 – 205, azaz 43.

## Levéldiagram nagy adathalmaz esetén

Egy nagyobb eloszlás levéldiagramjának\* elkészítésekor, a könnyebb áttekintés érdekében, a törzset alsó és felső részre bontjuk. Például az alábbi levéldiagram kis terjedelmű\* nagy adathalmazt\* ábrázol, ezért kissé zsúfoltnak tűnik:

Törzs	Levelek
0	1 1 2 3 3 4 5 6 6 7 8
1	1 1 2 3 4 6 8 9
2	0 2 2 6

Kulcs: 2|6 jelenti a 26-ot.

A – jel jelenti a gyökér alsó értékeit (0-4), a + jel pedig a felsőket (5-9), így a diagram könnyebben áttekinthető.

Törzs	Levelek
0–	1 1 2 3 3 4
0+	5 6 6 7 8
1–	1 1 2 3 4
1+	6 8 9
2–	0 2 2
2+	6

Kulcs: 2+|6 jelenti a 26-ot.

## Oda-vissza levéldiagram

Két adathalmazt ábrázoló levéldiagram. Egy ilyen diagram megtervezéséhez először is meg kell határoznunk a gyökér egységeit. Ezután az egyik adathalmaz elemeinek megfelelő egyjegyű számokat írjuk a törzs bal oldalára, a másik adathalmaznak megfelelőket pedig a jobb oldalra. Például az alábbi táblázatban két eloszlás adatai találhatók; készítsünk hozzá levéldiagramot:

A	19	20	23	23	27	30	30
B	8	17	21	27	31	31	40

1. Mindkét adathalmaz értékei alapján készítsük el a törzset, amely a tízes helyi értéken álló számjegyeket mutatja!
2. Írjuk be a törzs egy-egy oldalára – levélformában – az egyik, illetve a másik adathalmaz egységeit!

Data A		Data B
	0	8
	1	7
7 3 3 0	2	1 7
0 0	3	1 1
	4	0

Kulcs: 0 | 3 | 1 jelenti a 30-at és a 31-et.



## Kumulatív gyakorisági diagram

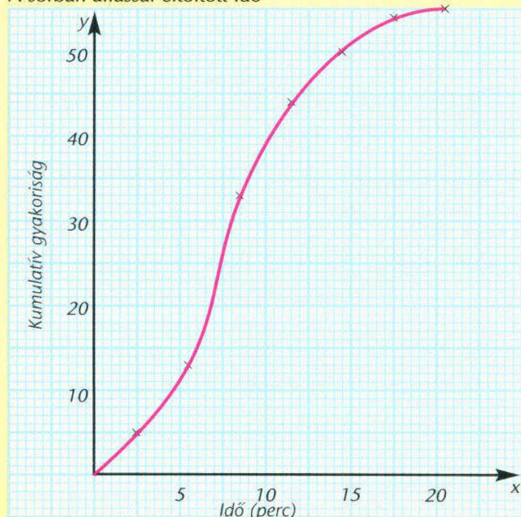
Olyan grafikon, amelyben az eloszlás\* kumulatív gyakorisági értékeit\* jelöljük be, és a pontokat összekötjük. Az alábbi példán látható, hogy a kumulatív gyakorisági görbe, amely a pontokat összekötő görbe, folytonos. Ezt a diagramot időnként **csúcsívnek** is szokták nevezni, hiszen a görbe a legnagyobb értékhez tart. Ha a pontokat egyenes szakaszokkal kötjük össze, akkor a diagramot **kumulatív gyakorisági poligonnak** nevezzük.

Például az alábbi csoportos gyakorisági-eloszlás-táblázat azt az időt (percre kerekítve) tartalmazza, amennyit a véletlenszerűen kiválasztott ügyfeleknek sorban állással kellett eltölteniük.

Idő (perc)	Gyakoriság	Kumulatív gyakoriság
0–2	5	5
3–5	8	5 + 8 = 13
6–8	20	13 + 20 = 33
9–11	11	33 + 11 = 44
12–14	6	44 + 6 = 50
15–17	4	50 + 4 = 54
18–20	1	54 + 1 = 55

A kumulatív gyakorisági diagram pontjai a kumulatív gyakoriság értékek a felső osztályhatároknál\*. Valamennyi kumulatív gyakorisági diagram a kumulatív gyakorisági tengelyek kezdőpontjától indul.

A sorban állással eltöltött idő



## A kumulatív gyakorisági diagram használata

A kumulatív gyakorisági diagramok segítségével, leolvashatjuk azoknak az embereknek a számát, akik 10 percnél kevesebbet várahoztak: keressük meg az  $x$  tengelyen a 10 percet, és rajzoljunk függőleges egyenest a grafikonig. Olvassuk le a kapott ponthoz tartozó kumulatív gyakoriságot az  $y$  tengelyen. Ahol  $x = 10$ , ott  $y = 39$  (közelítőleg), tehát 39 ember várt 10 percet vagy annál kevesebbet. 16 ember várt többet, mint 10 percet (az összes ember (55)–39).

A várakozási idők mediánjának\* meghatározásához először számoljuk ki a medián helyét. Ha a teljes kumulatív gyakoriság nagyobb vagy egyenlő, mint 100, akkor használjuk az  $\frac{n+1}{2}$  képletet. Ha, mint ebben az esetben is, 100-nál kevesebb, akkor az  $\frac{1}{2}(n+1)$  összefüggést:

$$\frac{1}{2}(55+1) = \frac{1}{2} \cdot 56 = 28$$

Ahol  $y = 28$ , ott  $x = 7,75$  (közelítőleg), tehát a várakozási idők mediánja 7,75 perc.

Az interkvartilis terjedelem\* számításához ki kell vonni az alsó kvartilist\* a felső kvartilisből\*.

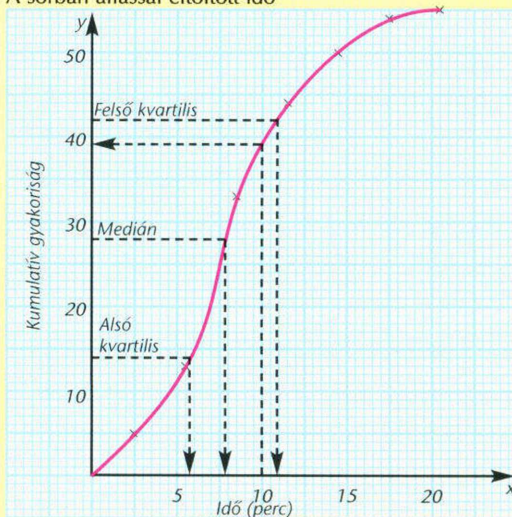
$$\text{Felső kvartilis pozíció} = \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(55+1)}{4} = 42$$

Ahol  $y = 42$ , ott  $x = 11$  (közelítőleg), tehát a felső kvartilis 11.

$$\text{Alsó kvartilis pozíció} = \frac{n+1}{4} = \frac{55+1}{4} = 14$$

Ahol  $y = 14$ , ott  $x = 5,75$  (közelítőleg), tehát az alsó kvartilis 5,75. Az interkvartilis terjedelem 5,25 perc (11–5,75).

A sorban állással eltöltött idő





### Az adatok középső fele (az „ötök” összefoglalója)

Egy eloszlás legkisebb értéke, alsó kvartilise\*, mediánja\*, felső kvartilise\* és legnagyobb értéke. Ezekből az értékekből számolható az adathalmaz terjedelme\* és interkvartilis terjedelme\*, és megmutatják, hogy az adatok mennyire szimmetrikusan\* szóródnak a medián körül.

### Dobozdiagram (sodrófadiagram)

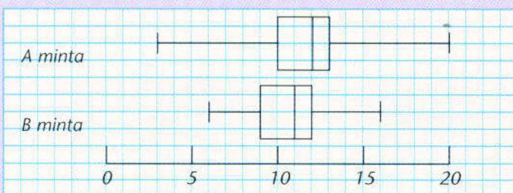
Olyan diagram, amely az adatok középső feléről ad grafikai szemléltetést. A dobozdiagram hasznos lehet két vagy több eloszlás szórásának összehasonlítására.

Minden egyes diagram téglalap alakú dobozokból áll. Ezek hossza az interkvartilis terjedelemtől\* függ, de magasságuk nem lényeges. Egy függőleges\* vonal osztja ketté a dobozt a mediánt\* jelölve. A dobozok mindkét végén található vízszintes vonalak („macskabajusz”) az eloszlás legkisebb értékétől a legnagyobb értékig tartanak, így vízszintesen\* leolvasható a terjedelem\*.

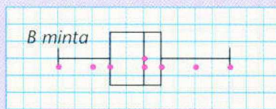
Például az alábbi eloszlást ábrázolja a következő dobozdiagram:

A minta: 3 10 10 12 12 13 15 20

B minta: 6 8 9 11 11 12 14 16



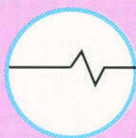
A dobozdiagram egy olyan változata, amelyben minden egyes értéket pontokkal jelölünk, hogy egyetlen részletet se veszítsünk el.



Időnként az adathalmaz\* olyan értéket is tartalmaz, általában mérési hiba miatt, amely sokkal nagyobb vagy kisebb a többinél. Ezeket kiugró értékeknek mondjuk, és különálló ponttal vagy csillaggal (\*) jelöljük (a macskabajszon túl).

### Cikk-cakk

Egy „szögletes hullám” (cikk-cakk) a tengelyeken\*, amely azt érzékelteti, hogy a beosztás (skála) nem vonatkozik a tengelyek ezen részére.

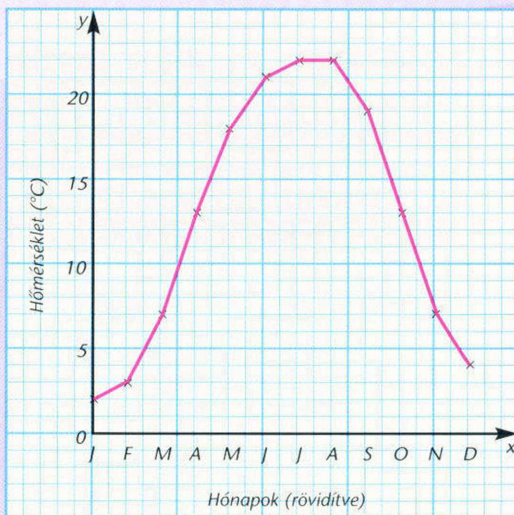


### Vonaldiagram

Egy eloszlás\* gyakorisági\* értékeit pontokkal ábrázoló és a pontokat egyenes szakaszokkal összekötő grafikon.

A cím elárulja, hogy miről szól az ábra, a tengelyek feliratai, hogy az egyes tengelyek mit mutatnak, illetve az egységet is meghatározzák a beosztások.

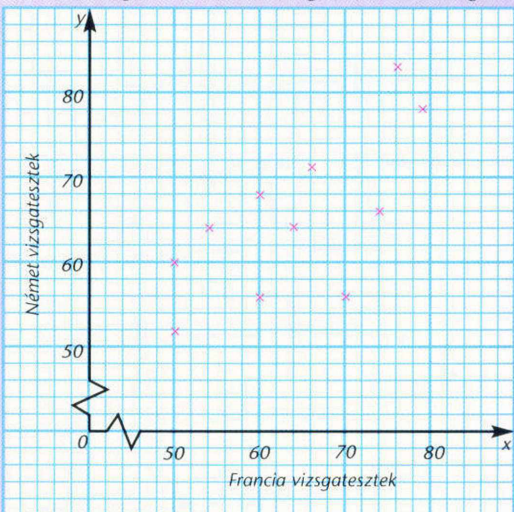
Az átlagos maximum hőmérséklet Hamburgban (Németo.)



### Pontdiagram

Olyan, pontokból álló grafikon, amely két mérés adathalmaz\* közötti kapcsolatot ábrázol. A pontok nincsenek összekötve, és több pont is elhelyezkedhet ugyanazon az x vagy y koordinátán. A cím és a tengelyek feliratai elárulják, hogy mit ábrázol a grafikon.

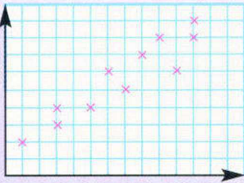
Franciaországban és Németországban kitöltött vizsgatesztek



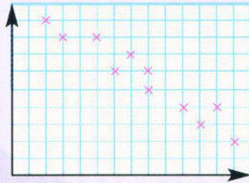


## Korreláció

Két értékhalmoz közötti kapcsolat. Ez a **pontdiagram**, megmutathatja, hogy van-e bármilyen korreláció az ábrázolt adathalmazok\* között. Ha a grafikonon a pontok növekvő tendenciát mutatnak, akkor ezt **pozitív korrelációnak** nevezzük. A csökkenő tendencia neve **negatív korreláció**.



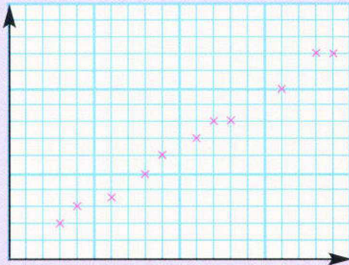
Ez a pontdiagram pozitív korrelációt mutat.



Ez a pontdiagram negatív korrelációt mutat.

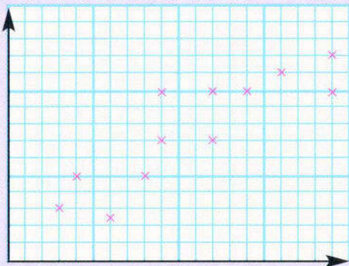
Ha a pontdiagram pontjai egy egyenesre illeszkednek (vagy majdnem illeszkednek), akkor **erős korrelációról** beszélünk.

Erős korrelációt eredményez, ha a két halmaz értékei között szoros kapcsolat van.



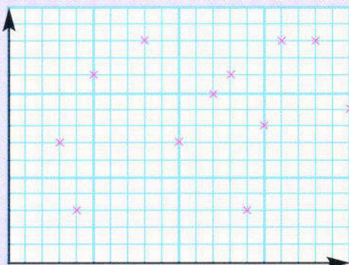
Ha a pontdiagram pontjai egy egyeneshez csak közelítenek, akkor **gyenge korrelációról** beszélünk.

Gyenge korrelációt eredményez, ha a két halmaz értékei között gyakori kapcsolat van.



Ha a pontdiagram pontjai szemmel láthatóan semmilyen kapcsolatban sincsenek egy egyenessel, akkor azt mondjuk, hogy **nincs korrelációjuk**.

Nincs korreláció, ha a két halmaz értékei nincsenek egy egyenesen, bár a halmazok értékei között létezik más kapcsolat.



## Regressziós egyenes

Az az egyenes a pontdiagramon, amely a két halmaz értékei közti korrelációt ábrázolja. Gyakran ránézésre egyenest szeretnénk rajzolni, akkor számoljuk ki az eloszlások átlagát, és állítsunk merőleget ezekben a pontokban a koordináta-tengelyekre! A két merőleges metszéspontját kössük össze a koordináta-rendszer kezdőpontjával, és hosszabbítsuk meg!

Például a következő táblázat az uszodában megtett hosszok számát mutatja különböző időpontokban.

Idő (perc)	5	8	10	13	15	18	20	23
Hossz	11	15	23	27	31	40	39	50

Nézzük meg e két érték között a korrelációt, ábrázoljuk őket egy pontdiagramon, majd rajzoljunk egyenest azon a ponton át, amely mindkét eloszlás átlagát reprezentálja (a grafikonon  $\otimes$  jelöli)!

Az idők átlaga:

$$\frac{5 + 8 + 10 + 13 + 15 + 18 + 20 + 23}{8} = \frac{112}{8} = 14$$

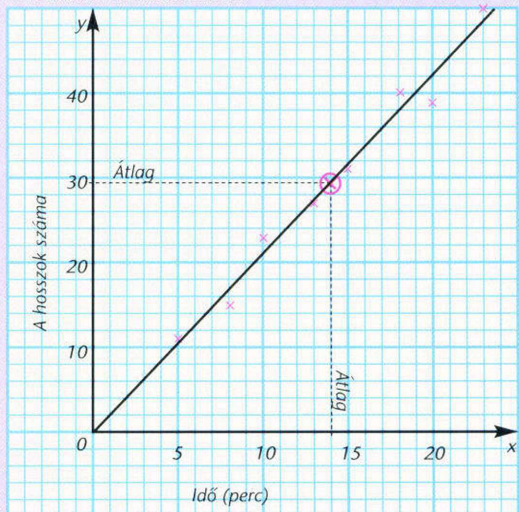
A hosszok átlaga:

$$= \frac{11 + 15 + 23 + 27 + 31 + 40 + 39 + 50}{8}$$

$$= \frac{236}{8} = 29,5$$

Tehát a legmegfelelőbb egyenest a (14; 29,5) koordinátájú ponton keresztül rajzolhatjuk meg. Az egyenes a (0;0) pontból indul (minthogy, ha nincs idő, nincs hossz sem, amit ezalatt leúszhatunk).

A leúszott hosszok száma





# VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

A **valószínűség-számítás** a statisztikának\* azon ága, amely lehetővé teszi, hogy kiszámoljuk valamilyen esemény bekövetkeztének a lehetőségét, és ennek a valószínűségnek számértéket ad. Például, ha feldobunk egy pénzérmét, akkor két lehetőség van: fej vagy írás lesz az eredmény. Annak az esélye, hogy fej lesz, a két lehetőség közül 1. Ezt a valószínűséget felírhatjuk törtként\* ( $\frac{1}{2}$ ), tizedes törtként\* (0,5), vagy százaléként\* (50%).

## Esemény

Valamilyen történés: például az érmefeldobás, vagy, ha két kockát dobunk.

## Kimenetel

Egy **esemény** eredménye például, hogy az érmével fejet vagy a kockával hatost dobtunk.

## (Siker) Eredmény

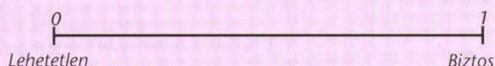
A bekövetkezett esemény (az eredmény). Például, ha azt szeretnénk, hogy fej legyen az eredmény, és az is lesz, akkor ez **sikeres kimenetel** lehet.

## Azonos valószínűségű események

Esemény, melynek **kimenetelei** egyenlő eséllyel következnek be. Például az érmefeldobásnál ugyanannyi az esélye annak, hogy fej vagy írás lesz a kimenetel.

## Valószínűségi skála

Egy skála, amellyel egy **kimenetel** valószínűségét mérjük. Annak az eseménynek a valószínűsége, amelyik biztosan bekövetkezik, 1. Például annak a valószínűsége, hogy míg elolvasad ezt a mondatot, addig egy picivel idősebb leszel, 1. Azt az eseményt, amelynek 1 a valószínűsége, **biztos eseménynek** mondjuk. Annak az eseménynek a valószínűsége, amely biztosan nem következik be, 0. Például annak a valószínűsége, hogy elefántta változol, 0. A 0 valószínűségű kimenetelt **lehetetlen eseménynek** nevezzük.



A 0 és 1 értékek a **valószínűség szélső-értékei**, és egy kimenetel bekövetkeztének valószínűsége 0 és 1 között bármilyen értéket felvehet. Ha a valószínűség 0-hoz közeli, akkor kevésbé valószínű a kimenetel; ha az 1-hez van közelebb, akkor valószínűbb az esemény bekövetkezése.

## Elméleti valószínűség

Egy **kimenetelnek** az a valószínűsége, amely egy elméleten alapul. Az elméleti (klasszikus) valószínűség azonos valószínűségi kimenetelen alapul: vagyis nem tartalmazhat eltérést vagy hibát.

Az elméleti valószínűség kiszámításának szabálya:  **$P$  (egy kimenetel bekövetkezése)**

$$= \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{összes lehetséges kimenetel}}$$

ahol  $P$  a valószínűség jele.

Például, ha egy táska 6 piros és 4 kék labdát tartalmaz, akkor annak a valószínűsége, hogy véletlenszerűen egyet kiválasztva kék labdát választunk:

$$P(\text{kék labdát választva}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Annak a valószínűsége, hogy véletlenszerűen egyet kiválasztva kék labdát választunk,  $\frac{2}{5}$ . Ezt írhatjuk tizedes törtként 0,4-nek, vagy százalékosan 40%-nak.

## Kísérleti valószínűség vagy relatív gyakoriság

Ez az érték megmutatja, hogy egy kimenetel előfordulásának száma hogyan aránylik az összes esemény számához.

A kísérleti valószínűség kiszámításának szabálya:  **$P$  (egy kimenetel bekövetkezése)**

$$= \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{összes esemény}}$$

ahol  $P$  a valószínűség jele.

Például, ha 100-szor dobunk egy kockával, és ebből 12-szer dobtunk hatost, akkor annak a **kísérleti valószínűsége** vagy **relatív gyakorisága**, hogy hatost dobunk:

$$P(\text{hatost dobunk}) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

Ezt az eredményt írhatjuk tizedes törtként 0,12-nek, vagy százalékosan 12%-nak.



## Az események típusai

### Elemi esemény

Olyan esemény, amely csak egyetlen tételből áll, például egy pénzérme feldobása.

### Összetett esemény

Olyan esemény, amely egynél több tételből áll, például két érme vagy egy érme és egy kocka dobása.

### Független esemény

Olyan esemény, melynek kimenetele nem függ semmilyen más eseménytől. A független eseményt **véletlen** eseménynek is szokták mondani.

Például, ha kétszer dobunk egy kockával, akkor annak az esélye, hogy másodikra egy bizonyos értéket dobunk, nem függ az első dobástól. Például a hatos dobásának esélye mindig ugyanannyi, akárhányszor is dobunk a kockával.

### Nem független esemény

Olyan esemény, amelynek van olyan kimenetele, amelyik egy másik eseménytől függ.

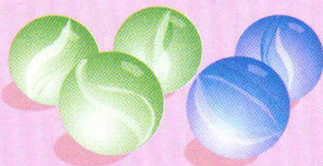
Például, ha véletlenszerűen kihúzzunk egy üveggolyót egy olyan zacskóból, amelyben zöld és kék üveggolyók vannak, és nem tesszük vissza, akkor a második húzás színe már függ az első húzás eredményétől.

Például, ha 3 kék és 3 zöld golyó van:

$$P(\text{kék golyót választunk}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ha egy kék golyót húztunk, és nem tesszük vissza, akkor annak a valószínűsége, hogy újra kéket húzunk,  $\frac{2}{5}$  (ugyanis 2 kék és összesen 5 golyónk van).

Annak a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztva éppen kék golyót húzunk,  $\frac{2}{5}$ .



Ha egy kimenetel valószínűsége függ az öt megelőző kimenetel valószínűségétől, akkor ezt **feltételes valószínűségnek** mondjuk. Annak a feltételes valószínűsége, hogy másodszorra kék golyót húzunk,  $\frac{2}{5}$ .

### Kölcsönösen kizáró események

Kettő vagy több olyan esemény, melyek egyszerre nem következhetnek be. Például, ha az **A** esemény: „piros lapot húzunk a pakliból” és **B** esemény: „pikket húzunk a pakliból”, akkor A és B egymást kölcsönösen kizáró események.

Ha egy kártyát húzunk a pakliból, akkor az nem lehet piros és pikk egyszerre, tehát ezek kölcsönösen kizáró események.



Egy kölcsönösen kizáró eseményekből (teljes eseményrendszer) álló halmaz összes valószínűsége (a valószínűségek összege) 1. Például egy pakli kártyából egy lap kiválasztására kölcsönösen kizáró események halmaza:

- Pirosat választunk ( $\frac{26}{52}$ )
- Picket választunk ( $\frac{13}{52}$ )
- Treffet választunk ( $\frac{13}{52}$ )

Ezek közül semelyik kettő nem következhet be egyszerre. Ha ezeket a valószínűségeket összeadjuk:

$$\frac{26}{52} + \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = 1$$

Az eredmény ugyanez lesz, ha egy másik teljes eseményrendszert választunk, például ilyen, ha fekete kártyát húzunk, kört vagy kárót.

Annak a valószínűségét, hogy valami nem következik be, megkapjuk, ha az 1-ből kivonjuk annak a valószínűségét, hogy ez a valami bekövetkezik.

Annak a valószínűsége, hogy hatost dobunk egy kockával,  $\frac{1}{6}$ .

Annak a valószínűsége, hogy nem dobunk hatost (1, 2, 3, 4 vagy 5-t dobunk),  $\frac{5}{6}$ . Ez egyenlő azzal, hogy  $1 - \frac{1}{6}$ .





## Összetett (egyesített) valószínűségek

### Összegzési szabály vagy „vagy”-szabály

Ezt a szabályt akkor használjuk, ha egy kimenetel valószínűségét keressük több kimenetel közül. Az összegzési szabály a következő:

$$P(A \text{ vagy } B) = P(A) + P(B)$$

ahol P a valószínűség jele, A és B a kimenetek.

Az összegzési szabályt akárhány kölcsönösen kizáró eseményre\* alkalmazhatjuk. Például:

$$P(X \text{ vagy } Y \text{ vagy } Z) = P(X) + P(Y) + P(Z)$$

Például annak a valószínűsége, hogy egy piros vagy egy pikk vagy a treff király a kihúzott lap:

$$P(\text{Piros vagy Pikk vagy Treff Király}) = P(\text{Piros}) + P(\text{Pikk}) + P(\text{Treff Király})$$

ahol P a valószínűség jele.

52 lap van egy csomag francia kártyában. Ezek közül 26 piros, 13 pikk és csak a treff király. Tehát:

$$P(\text{Piros}) = \frac{26}{52}$$

$$P(\text{Pikk}) = \frac{13}{52}$$

$$P(\text{Treff Király}) = \frac{1}{52}$$

$$P(\text{Piros vagy Pikk vagy Treff Király}) = \frac{26}{52} + \frac{13}{52} + \frac{1}{52} = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$$

Annak a valószínűsége, hogy egy piros vagy egy pikk vagy a treff király a kihúzott lap:  $\frac{10}{13}$ .

*Az összegzési szabályt használhatjuk annak a kiszámítására, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy egy piros vagy egy pikk vagy a treff király a kihúzott lap.*



### Szorzási szabály vagy „és”-szabály

Összetett események (kimenetek) valószínűségének kiszámítására vonatkozó szabály. A szorzási szabály a következő:

$$P(A \text{ és } B) = P(A) \cdot P(B)$$

ahol P a valószínűség jele, A és B a kimenetek.

A szorzási szabályt összetett független\* vagy nem független események\* valószínűségének kiszámítására is használhatjuk.

Például keressük meg annak a valószínűségét, hogy négyest dobunk egy kockával, és királyt húzunk a pakliból:

$$P(4 \text{ és } K) = P(4) \cdot P(K)$$

ahol P a valószínűség jele, K pedig a királyt jelöli.

6 szám a dobókockán, és 52 lapból 4 király van a francia kártyában, tehát:

$$P(4) = \frac{1}{6}$$

$$P(K) = \frac{4}{52}$$

$$P(4 \text{ és } K) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{52} = \frac{4}{312} = \frac{1}{78}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy négyest dobunk egy kockával, és királyt húzunk a pakliból:  $\frac{1}{78}$ .

Nem független események kombinációjánál a szorzási szabályt úgy alkalmazzuk, hogy először kiszámoljuk az egyes kimenetek valószínűségeit a bekövetkezés sorrendjében, majd összeszorozzuk az eredményeket.

Például annak a valószínűségnek a kiszámítása, hogy húzunk egy királyt egy pakli kártyából, majd még egyszer királyt húzunk úgy, hogy az elsőt nem tettük vissza:

$$P(K \text{ és } K) = P(\text{első } K) \cdot P(\text{második } K)$$

ahol P a valószínűség, K pedig a király jele.

4 király van az 52 lapos pakliban, tehát:

$$P(\text{első } K) = \frac{4}{52}$$

$$P(\text{második } K) = \frac{3}{51}$$

$$P(K \text{ és } K) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}$$

Annak a valószínűsége, hogy királyt húzunk egy pakli kártyából, majd még egyszer királyt húzunk úgy, hogy az elsőt nem tettük vissza:  $\frac{1}{221}$ .



## Lehetséges kimenetek

Egy kísérlet lehetséges kimenetelei\* függnek a kísérletet befolyásoló események számától, és hogy ezek függetlenek\*-e, vagy sem.

A független események lehetséges kimeneteleit listába rendezhetjük.

Például pénzfeldobás esetén a lehetséges kimeneteleket jelölhetjük így:

F; Í

ahol F a fejet, Í az írást jelöli.

Ha két pénzt dobunk fel, akkor a lehetséges kimenetek száma nő:

FF; FÍ; ÍF; ÍÍ

Ha 3 érmét dobunk fel, akkor a lehetséges kimenetek száma ismét nő:

FFF; FFÍ; FÍF; ÍFF; ÍÍF; ÍFÍ; FÍÍ; ÍÍÍ

### Valószínűségi mező (tábla)

Két független esemény\* kimeneteleit ábrázoló táblázat.

Például az alábbi valószínűségi tábla azt mutatja meg, hogy ha két kockával dobunk, és az eredményeket összeadjuk, akkor milyen lehetséges értékeket kapunk.

		Első kocka					
		1	2	3	4	5	6
Második kocka	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

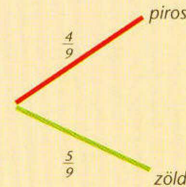
Annak a valószínűségnek a kiszámítására, hogy egy konkrét értéket kapunk, ha összeadjuk a két kockán szereplő értékeket, először számoljuk meg, hogy az a bizonyos összeg hányszor fordul elő a táblázatban! Például a 9 4-szer szerepel a 36 lehetőség között, tehát annak a valószínűsége, hogy 9 lesz az összeg,  $\frac{4}{36}$  azaz  $\frac{1}{9}$ .

### Valószínűségi fadiagram

Olyan diagram, amely az események lehetséges kimeneteleit az „ágakra” írja. Különösen hasznos a valószínűségi fadiagram használata nem független események\* esetén.

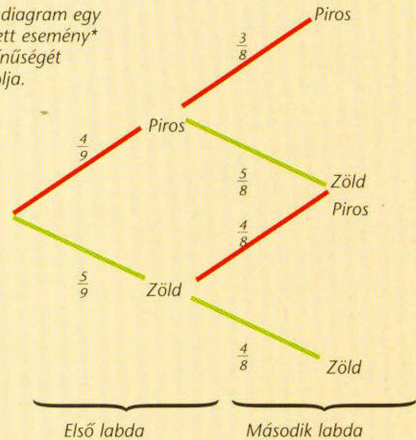
Például, ha véletlenszerűen kiválasztunk egy labdát abból a zsákból, amelyben 4 piros és 5 zöld labda van, akkor így ábrázolhatjuk:

Ez a fadiagram egy egyszerű (elemi) esemény\* valószínűségét ábrázolja.



Ha az első labdát nem tesszük vissza, és egy másodikat választunk, akkor a valószínűségek függenek az első kimenetel eredményétől:

Ez a fadiagram egy összetett esemény\* valószínűségét ábrázolja.



Ha először piros labdát húzunk, és nem tesszük vissza, akkor annak a valószínűsége, hogy másodikra is pirosat választunk, csak  $\frac{3}{8}$  (hiszen csak 3 piros labda marad a 8-ból). Ha először zöldet húzunk, akkor annak a valószínűsége, hogy másodszor is zöldet választunk, csak  $\frac{4}{8}$  (hiszen csak 4 zöld labda marad a 8-ból).

### Esélyek

Egy esemény valószínűsége, melyet a „bekövetkezik : nem következik be” aránnyal fejez ki.

Például annak az esélye, hogy hatost dobunk egy kockával 1 : 5 ( egy esély van rá, hogy jót dobunk, és 5, hogy rosszat). Annak a valószínűsége, hogy hatost dobunk  $\frac{1}{6}$ .





# PÉNZÜGYI KIFEJEZÉSEK A-TÓL Z-IG

Íme néhány pénzügyi kifejezés abc sorrendben, melyekkel találkozhatunk.

## Adó

A kormány által összegyűjtött pénz, amelyet pl. iskolák, egészségügyi intézmények fenntartására fordítanak. Nagyon sokféle adó létezik. Például a jövedelemadó közvetlen adózási forma. Közvetve adózunk, amikor pénzt költünk. Közvetett adó pl. az áfa.

## Alapdíj

Olyan fix összeg, amelyet a szolgáltató társaság kérhet az általa nyújtott szolgáltatásért. Például a telefonszámla esetén ez az előfizetési díj.

## Általános forgalmi adó (áfa)

Adó, amelyet az áruk és szolgáltatások árához még hozzáadnak. Ez az ár bizonyos százaléka, mértékét a kormány határozza meg.

## Árengedmény

Egy tétel árának csökkentése. A 10%-os árengedmény azt jelenti, hogy az árat 10%-kal csökkentik.

## Árfolyam (deviza)

Egy adott ország valutáját egy másik valutára váltja át.

## Befektetési bevétel

Különböző befektetésekből származó pénz.

## Biztosítási prémium

Egy adott összeg, amit egy biztosító társaságnak fizetünk. A prémiumot általában évente fizetik. Ha egy adott évben nem volt követelésünk a biztosítótól (pl. autós casco-biztosítás esetén nem kértünk a biztosítótól kárrendezésre pénzt), akkor nő a prémium összege (bónusz). Ez általában a következő évi díj csökkenését jelenti.

## Darabbér

Olyan munkadíj, amelyet nem az eltöltött órák száma, hanem az elkészített munkadarabok száma határoz meg. Például egy kőműves esetén, mondjuk, a lerakott téglák száma.

## Életbiztosítás

Egy adott összeget minden hónapban – több éven át – befizetünk egy számlára egy biztosítónál, és az előre meghatározott idő letelte után, mintegy nyugdíj-kiegészítésként, az adott nyugdíjpénztár az előre meghatározott pénzösszeget (havonta) fizeti nekünk.

## Fizetés

Az a pénz, amelyet egy év alatt keresünk. Gyakran 12 részre osztják, és havonta fizetik. (Nálunk általában ez jellemző).

## Hitel

A hitelnek sokféle jelentése van. Egy hitel-tranzakcióban pénzt veszünk fel egy számlán keresztül. Az, hogy valaki hitelképes, azt jelenti, hogy lehetősége van pénzt kölcsönözni. Ha valaki tud hitelezni, azt jelenti, hogy van pénze.

## Hitelbecslés

Olyan rendszer, amelyet a bankok vagy más pénzintézetek arra használnak, hogy megállapítsák, mekkora hitelt adjanak egy adott ügyfélnek.

## Hitelkártya

Olyan kártya, amellyel vásárolhatsz, és csak később kell fizetned. Gyakran havonta kell fizetni, és a kölcsön összege után kamatot számolnak fel.

## Hitelkeret

A hitelkártyával maximálisan felhasználható összeg. De lehetőség van megbízást adni az összeg feletti kölcsönre is.

## Hitelmérleg

A bankszámládon található pénzösszeg.

## Infláció

Az áruk és szolgáltatások árának átlagos növekedése az idők folyamán. Sokféle módszer létezik az infláció mérésére, ilyen pl. az Egyesült Királyságban a „Retail Price Index” (RPI).



**Jelzálog**

Nagyobb összeg, amelyet egy banktól kapunk kölcsön valamilyen ingatlan vagy ház vásárlásakor az ingatlan terhére. Ezt kamatostul néhány év alatt kell visszafizetnünk.

**Jövedelemadó**

Éz a fizetés után fizetendő adó. Egy bizonyos összegig nem kell adót fizetnünk, de előlött már az éves jövedelem nagyságától függ, hogy annak hány százaléka az adó. Vannak különböző adókedvezmények, melyeket bizonyos feltételek mellett igénybe vehetünk (pl. gyerekek utáni adókedvezmény). Minél többet keresünk, annál többet kell adóznunk is.

**Jövedelem**

Fizetés vagy munkabér. A bruttó jövedelem a **levonások** előtti jövedelem. (Nálunk **adóelőleget**, **tb-előleget** és bizonyos munkavállalói járulékokat vonnak le.) A **nettó jövedelem** (amelyet kézhez kapunk) az az összeg, amely a **bruttó jövedelemből** a levonások után marad.

**Közüzemi számla**

Általános szolgáltatásért fizetett számla, például gáz, víz, villany. Fizethetjük havonta, negyedévente, esetleg évente.

**Megbízási díj**

Valamilyen szolgáltatás igénybevételéért fizetendő illeték, mint pl. ha valakinek a nevében autót veszünk. A megbízási díj gyakran a vételár bizonyos százaléka.

**Mérleg**

Elszámolás végösszege, amikor az összes bevételt és kiadást figyelembe vettük.

**Nyugdíjpénztár**

Egyféle nyugdíj-kiegészítés, amelyet havonta a nyugdíj mellett kapunk, ha korábban a fizetésünkéből valamely nyugdíjpénztárba (pénzintézet) havonta befizettünk egy adott összeget (a kötelező társadalombiztosítási járulékból is néhány százalék ide utalható).

**Pénznem (valuta)**

Egy adott országban éppen használt pénznem. Például Japánban a yen.

**Számlakivonat**

Jelentés (kimutatás), amelyet a bank havonta küld az ügyfeleknek, feltüntetve benne a bevételeket és a kiadásokat.

**Személyi kölcsön**

Banki kölcsön valaminek a megvásárlására. Természetesen kamattal jár.

**Takarékbetét (számla)**

Olyan számla, amely a betett pénz után kamatozik.

**Teljes hitelmutató (THM)**

Bármilyen kölcsön teljes költsége, beleértve a jelzáloghitelt is, kifejezhető a kölcsön összegének kamataként (százalékaként). Az THM tartalmaz némi adminisztrációs illetéket, valamint a kamatlábat is.

**Tőzsde**

Az a hely, ahol értékpapírokat és részvényeket adnak el és vásárolnak. Ha egy részvényt jól kereskednek, akkor annak felmegy az ára, ellenkező esetben esik az árfolyama.

**Túlóradíj**

A munkaidőn túl munkával eltöltött órák utáni munkabér. Ez általában különbözik a normál óradíjtól.





# MATEMATIKAI SZIMBÓLUMOK (JELÖLÉSEK)

A következő lista azokat a matematikában leggyakrabban használt szimbólumokat tartalmazza, melyeket ismernünk és használnunk kell. (Az  $n$  és  $m$  betű valamilyen adott értéket jelöl.)

$+$	Összeadás jele (lásd a 14. o.) pl. $2 + 5 = 7$	$\pm n$	Pozitív vagy negatív szám (lásd a 11. o.) pl. $\sqrt{16} = \pm 4$	$\geq$	Nagyobb vagy egyenlő (lásd a 90. o.)
$-$	Kivonás jele (lásd a 14. o.) pl. $23 - 4 = 19$	$\dot{n}$	Végtelen szakaszos tizedes tört (lásd a 19. o.) pl. $10 : 3 = 3,3$	$\neq$	Nem egyenlő (lásd a 90. o.) pl. $3 \cdot 2 \neq 4$
$\cdot$	Szorzás jele (lásd a 14. o.) pl. $6 \cdot 5 = 30$	$n : m$	arány (lásd a 24–26. o.) pl. $3 : 2$	$\approx$	Közelítően egyenlő (lásd a 90. o.) pl. $100 : 9 \approx 11$
$:$	Osztás jele (lásd a 15. o.) pl. $45 : 9 = 5$	$\propto$	arányos (lásd a 25–26. o.)	$\Sigma$	Szumma (összeg) (lásd a 14. és 101. o.) pl. $\Sigma(1, 2, 3) = 6$
$=$	Egyenlőség jele (lásd a 79. o.) pl. $2 + 3 = 6 - 1$	$n^\circ$	Fok (szög) (lásd a 32–33. o.) pl. teljes szög = $360^\circ$	$\bar{n}$	átlag (lásd a 101. o.)
$n^2$	Négyzettség (lásd a 8. és a 21. o.) pl. $4^2 = 4 \cdot 4$	$\pi$ $P_i$	(lásd a 66. o.) közelítőleg 3,141592654...	$\{n\}$	halmaz (lásd a 12–13. o.) pl. $A = \{3, 5, 8\}$ és $B = \{1, 2, 3\}$ halmazok
$n^3$	köbszám (lásd a 8. és a 21. o.) pl. $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$	$\angle$	Szög (lásd a 32–33. o.) pl. derékszög = $90^\circ$	$\in$	egy halmaz eleme (lásd a 12. o.) pl. $3 \in \{3, 5, 8\}$
$\sqrt{n}$	négyzetgyök (lásd a 11. o.) pl. $\sqrt{49} = 7$	$\sphericalangle$	Derékszög (lásd a 32. o.)	$\notin$	nem eleme egy halmaznak (lásd a 12. o.) pl. $4 \notin \{3, 5, 8\}$
$\sqrt[3]{n}$	köbgyök (lásd a 11. o.) pl. $\sqrt[3]{125} = 5$	$\alpha$	Tetszőleges szög <i>alfa</i> (lásd a 60. o.)	$H$	A halmazok halmaza (univerzális halmaz) (lásd a 12. o.) pl. $H = \{\{A\}\{B\}\{\dots\}\}$
$\%$	százalék (lásd a 27–28. o.) pl. $\frac{1}{2} = 50\%$	$\theta$	Tetszőleges szög <i>theta</i> (lásd a 60. o.)	$\emptyset$ vagy $\{\}$	Üres halmaz (lásd a 12. o.)
$+n$	pozitív szám (lásd a 7. o.) pl. $+2 \cdot +3 = +6$ (nálunk így jelölük: $(+2) \cdot (+3) = (+6)$ )	$\equiv$	Azonosan egyenlő (lásd a 75. o.) pl. $3x \equiv 5x - 2x$	$\cup$	Unió vagy egyesítés (lásd a 13. o.) pl. $\{3, 5, 8\} \cup \{1, 2, 3\}$ $= \{1, 2, 3, 5, 8\}$
$-n$	negatív szám (lásd a 7. o.) pl. $+3 \cdot -4 = -12$ $((+3) \cdot (-4) = -12)$	$<$	kisebb, mint (lásd a 90. o.) pl. $1 < 3$	$\cap$	Metszet vagy Közös rész (lásd a 13. o.) pl. $\{3, 5, 8\} \cap \{1, 2, 3\}$ $= \{3\}$
		$>$	nagyobb, mint (lásd a 90. o.) pl. $3 > 1$		
		$\leq$	Kisebb vagy egyenlő (lásd a 90. o.)		



## TÁRGYMUTATÓ

A tárgymutatóban található oldalszámokat két csoportba oszthatjuk. A vastagon szedettek (pl. **92**) mutatják meg, hogy az adott szóhoz kapcsolódó definíciót hol találjuk. A vékonyabban szedett oldalszámok (pl. 92) pedig a kiegészítő információk helyét jelölik. Az utalásokat, rövidítéseket, szimbólumokat az adott szó után zárójelben találhatjuk. Ha az oldalszámot zárójeles kifejezés követi, akkor ez azt jelenti, hogy a tárgymutatóban szereplő szót az adott definíció szövegén belül kell keresnünk.

12 / 24 órás időszámítás 74

## A

ábrázolás

adat **105–111**

függvény 92, 93

adat **96–97**

lista 96, 99

naplózás 97

-ábrázolás **105–111**

-csoportosítás 99

-gyűjtés 97

-kezelés **96–115**

adók **116**, 117

adózás **116**

áfa **117**

alap számok 6

(számrendszerek)

alapdíj **116**

alfa ( $\alpha$ ) 60

algebra **75–95**

szabályok **76–79**

algebrai egyenletek (lásd egyenletek)

algebrai kifejezések **75**, 76, 77, 78, 79, 90

törtek **77**,

grafikon **80–84**

azonosságok ( $\equiv$ ) 75

bővítése **78**

alsó osztályhatár **99**

(osztályhatárok) (intervallumosztály)

kvartilis ( $Q_1$ ) **102**, 109, 110

(algebrai törtek) arányok **24**

alsó osztályhatár **99** (osztályintervallum)

kvartilis ( $Q_3$ ) **102**, 109, 110

általános alak **81**

általános halmaz **12**, 13

áltört **18**

amplitúdó **64** (változás a grafikonon)

arab számjegyek 6

arány **24**

(bevezetés) 25, 26, 52, 66

módszer **26**

arányos növelés vagy

cökkentés **52**

arányosság ( $\propto$ ) **24**, **25**, 26, 52, 98, 107

arányossági problémák megoldása **26**

arccos **61** (szögek visszakeresése)

arctg **61** (szögek visszakeresése)

arcsin **61** (szögek visszakeresése)

árendmény **116**

árfolyam **116**

aszimmetria **42** (bevezetés)

asszociativitás törvénye **14**, **15**, 46

átlag 73, 99, 100, **101**, 102, 103, 104, 111

-sebesség **73** (sebesség)

átlók **30**, 33

sokszögé **34**, 39,

poliéderé **41**

átmérő 55, **56**, 66, 69, 70

azonos keresztmetszet **58** (térfogat képlet)

azonos távolságra lévő

pontok, egyenesek vagy

tartományok **48**, 65

azonosság ( $\equiv$ ) 75

azonosságok

számtani **15**

hatványozás **22**, 76

## B

balesetmentes bónusz **117**

(biztosítási prémium)

becsült terület **55**

befektetési bevétel **116**

behelyettesítés **77**, 79, 81, 85, 86, 87, 88, 89

belső szög **34**, 35, 37, 50, 71

béta ( $\beta$ ) 60, 61

bezárt szög **37**, **70**

(a háromszög szögei) 49, 63

bináris számok 6

(számrendszer)

binomiális kifejezések **75**, 78

birodalmi mértékegységrendszer **72–73**

biztos esemény **112**

(valószínűségi skála)

biztosítás **116**

biztosítási prémium **117**

bruttó bevétel **116** (adó)

bruttó jövedelem **116** (jövedelem), 117

## C

centiliter (cl) **72**

(mértékegység)

centiméter (cm) **72**

(mértékegység)

ciklikus sokszögek **34**, 71

négyszögek **71**



## CS

cserék a tapasztalati szórásban 104  
csigavonal 10  
csonka gúla 41  
(keresztmetszet)  
csoportos kiválasztásos mintavétel 98  
csúcs 91  
gúláé 41,  
háromszögé 37 (szögek a háromszögben)  
csúcsok 91  
sokszögeké 33, 34, 35, 36, 37, 48, 57, 70, 71  
poliédereké 40, 41

## D

darabbér 117  
dél 74 (12 órás időszámítás)  
délelőtt (de) 74 (12 órás időszámítás)  
delta 39  
deltoid (papírsárkány) 39  
délután (du) 74 (12 órás időszámítás)  
derékszög 30, 32, 41, 48, 50, 51, 56, 57, 64, 70, 71  
derékszögű háromszögek 37, 38, 45, 56, 60–61, 70  
derékszögű háromszögek egybevágósága 38  
derékszögű hasáb 41 gúla 41  
derékszögű koordináta-rendszer 31 (Descartes-féle koordinátarendszer)  
Descartes-féle koordináták 31  
koordináta-rendszer 31, 80  
dimenziók 30, 31  
diszkrét adat 96, 101, 106  
dobozdiagram vagy sodrófadiagram 110  
dobozok 110 (dobozdiagram)  
dodekaéder 40 (testek)  
E  
egész számok 6, 12, 19  
egy dimenziós 30, 31

(dimenziók)  
egybevágó háromszögek 38, 70  
egybevágóság,  
egy oldal és a rajta fekvő két szög 38  
két oldal és a közbezárt szög 38  
egyenes 30, 31, 32, 33, 34, 48  
grafikonja 110  
a legjobban illeszkedő vonal 111  
nézővonal 53  
egyenes arányosság 25, 26  
egyenes adózás 117  
egyenes oldalú testek rajzolása 50  
egyenes szög 32  
vonal grafikonja 80, 81, 82  
egyenlet rendezés 79  
egyenletek 60, 61, 79  
(bevezetés), 80, 81, 85, 86, 87, 88, 89, 90  
másodfokú 85  
levezetése 79, 85–86  
egyenletrendszerek 87–89  
megoldása 87–89  
egyenlő mérték 24,  
egyenlő oldalú sokszögek 35  
háromszögek 36, 37, 40  
egyenlő számjegyek 44  
egyenlő szögű sokszögek 35  
egyenlőségjel (=) 79  
egyenlő szárú háromszög 37  
trapéz 39 (trapézok)  
egyenlőtlen oldalú (általános) háromszög 37  
egyenlőtleniségek 90–91  
grafikonja 91  
megoldása 90  
kettős e. megoldása 91  
egyenlő valószínűségű események 112  
egymást követő számok 6  
egynemű tagok 75 (tagok), 77, 78, 88  
egységes módszer 26

egységkocka 58  
egyszerű mintavétel 98  
egyszerű tört 18  
egyszerű véletlenszerű kiválasztás 98  
egyszerűsítés törtknél 17,  
ekvivalens törtek 18, 27  
kifejezéseknél,  
egyenleteknél 77, 78, 87, 89  
törtknél, arányoknál 24  
együttható 75, 81, 85, 86, 88  
éjfél 74 (12 órás időszámítás)  
ekvivalens törtek 17  
algebraiban 77  
eladási és szolgáltatási adók (általános forgalmi adó) 116  
élek 40  
(poliéderek), 41  
elemek (E) 12, 13, 92  
elemi esemény 113  
elforgatás 43, 44  
ellipszis 69  
eloszlás 96, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 108, 109, 110, 111  
eloszlás terjedelme 102, 108, 110  
előjeles számok 7, 76  
elsődleges ismerv (adat) 96  
elsőfokú függvény 93  
elsőfokú törtfüggvény 93  
eltolás 43  
(transzformáció), 45, 95  
eltolásos tükrözés 44  
emeletes törtek 18  
eredmény 60, 61, 62, 79  
(egyenlet rendezés) 87, 88, 90  
érintési pont 71 (érintő)  
érintő (görbéhez húzott) 71, 95  
erős korreláció 111  
(korreláció)  
értékes számjegy 6, 9, 16, 23  
értékkészlet (függvény) 92, 93  
értékkészlet, f függvényé 92  
(helyettesítési érték)



értelmezési tartomány 92, 93  
érzet 43 (tükrözés)  
„és”-szabály 114  
esélyek 115  
esemény 112, 113, 114, 115  
Euler tétele 40  
exponenciális görbe 84  
függvény 93  
grafikon 84  
jelölés 21

## F

fél kistengely 69 (ellipszis)  
fél nagytengely 69 (ellipszis)  
felemelés 41  
felező egyenes 48, 51  
felező merőleges 43, 48, 51,  
húré 70  
felezőpont  
húré 70  
szakaszé 48, 54  
félgömb 69  
félíg szabályos mozaik 36  
félíg szabályos poliéder 40  
felismert tényező 85  
félkör 51, 65, 70  
félkörív 65, 70  
felmérés 97, 98  
felszín 57  
kúp 68  
henger 67  
gömb 69  
feltételes egyenlőtlenség 90  
valószínűség 113 (nem  
független események)  
feltüntetett arány 25  
ferde hasáb 41 (hasáb)  
Fibonacci-sorozat 10  
fizetés 117  
fok ( $^{\circ}$ ) 32  
(bevezetés), 33, 53  
folyamatra 92  
folytonos adat 96, 101, 106,  
107  
font (lb) 72  
fordított arányosság 25  
fordított százalékszámítás 27  
(az eredeti összeg  
kiszámítására)

forgásszimmetria 39, 42  
irányszáma 42  
független esemény 113, 114,  
115  
független változó 75 (függő  
változó)  
függőleges 30, 31, 50, 95,  
106, 109, 110  
függvény alak 80  
függvények (f) 80, 82, 84,  
92–93  
grafikonja 93  
trigonometrikus vagy  
szögfüggvények 60–64, 93

## G

gallon (gal) 72 (birodalmi  
egység)  
geometria 30–31, 32–44,  
47–50, 51, 52–54, 55–57,  
58–59, 60–64, 65–71  
vektorokkal 46  
gömb 59, 69  
görbével határolt terület 67,  
68  
grafikon  
alatti terület 94–95  
függvény 92, 93  
egyenlőtlenség 91  
egyenés 110  
pontdiagram 110, 111  
algebrai 80–84  
kör 84  
harmadfokú 83  
út-idő 73  
exponenciális 84  
általános alak 80  
másodfokú 82  
reciprok 25, 84  
szórás 110, 111  
egyenletrendszerek 88–89  
lineáris grafikon vázlata 81  
transzformáció 93  
trigonometrikus 64  
grafikonról leolvasható  
információk 94–95  
grafikus ábrázolás 80  
harmadfokú 83  
függvény 93

egyenlőtlenség 91  
egyenés 80, 82  
másodfokú 82  
reciprok 84  
egyenlet-rendszerek 88–89  
gramm (g) 72 (mértékegység)  
per köbcentiméter (g/cm<sup>3</sup>)  
59 (sűrűség)  
gúla 41, 59, 68  
gyakoriság (f) 96  
sűrűség 107 (hisztogram)  
eloszlás 99  
(gyakorisági táblázat), 100,  
101, 105, 106, 110  
vonaldiagram (poligon) 107  
táblázat 99, 105  
gyenge korreláció 111  
(korreláció)  
gyorsulás 73, 95  
gyökök  
köbgyök 11, 22  
másodfokú egyenlet gyökei  
85  
négyzetgyök 11, 22, 86

## H

halmaz jelölési módszerek 12  
(halmazok)  
halmazok 12–13, 92, 98  
jelölése 12, 92  
halmazok metszete ( $\cap$ ) 13  
halmazok uniója ( $\cup$ ) 13  
háló  
hengeré 67  
poliéderé 41  
hányados 15 (osztás)  
harmadfokú görbe 83  
harmadik kvartilis ( $Q_3$ ) lásd  
felső kvartilis  
három oldal egybevágósága  
38  
háromjegyű irányszám 53  
háromszög  
szög melletti oldal 60, 61  
szöggel szemközti oldal 60,  
61  
háromszög alapú hasáb 41  
háromszögek 30, 34, 37–38,  
56, 60–63



szerkesztés **49**  
 háromszögszámok **8**  
 háromtagú algebrai kifejezés **75**  
 hasáb **41**, **58**, **67**  
 hasonló alakzatok **44**  
   háromszögek **38**  
 hatlapú test (hexaéder) **40**  
   (poliéder)  
 hatszög **34** (sokszög)  
 hatvány **6**, **16**, **19**, **21**, **22**, **76**, **84**  
 hegyesszög **32**, **35**  
 hegyesszögű háromszög **37**  
 helyettesítési érték (f) **92**  
 helyi érték **6**, **9**, **16**, **19**  
 henger **58**, **67**  
 hétlapú test (heptaéder) **40**  
   (poliéder)  
 hétszög **34** (sokszög)  
 hétszög **34** (sokszögek)  
 hiperbola **84**  
 hipotézis **45**, **60**  
   (Pitagorasz-tétel), **61**  
 hisztogram **107**  
 hitel **116**  
   mérleg **116**  
   kártya **116**, **117**  
   kamat **116**  
   tranzakció **116**  
 hitelkártya **116**  
 homlokzat **41**  
 homogén sokaság **98**  
   (véletlenszerű mintavétel)  
 hosszabbik átló **41** (átlók)  
 hosszú osztás **15**  
 hosszú szorzás **14**  
 hosszúság **72**, **96**  
 hozzárendelés függvényeknél **92**  
 húr **65**, **69**, **70**, **95**  
  
**I**  
 idő **73**, **74**  
 ikozadodekaéder **40** (félig szabályos poliéder)  
 ikozaéder **40** (poliéder)  
 inch (*hüvelyk*) **72** (birodalmi egység)

infláció **117**  
 interjú **97**  
 interkvartilis terjedelem **102**  
 intervallum, középpérték **99**, **101**, **104**, **107**  
 inverz koszinusz, szinusz és tangens arányánál **61**  
 függvény **92**  
 műveletek **14**  
   (összeadás), **15**  
 irány **53**  
 irányított felmérés **97**  
 irányított szakasz **45**  
   (vektorok)  
 irányszám (index) **16**, **21**, **22**  
   algebrai kifejezésekben **75**, **76**  
 irányszám **73** *lásd még*  
   háromjegyű irányszám  
 iránytű **53**  
 irracionális szám **9**, **66**  
 ismeretlen szög **60**  
 ív **47**, **48**, **49**, **50**, **65**, **70**  
   körív hosszának kiszámítása **66**  
 izometrikus papír **50**  
  
**J**  
 jelölés hozzárendelésé **92**  
   egyenlőtlenségé **90**  
 jelzőlog **116**, **117**  
 jövedelem **116**  
 jövedelemadó **116**, **117**  
  
**K**  
 kamat **28**, **29**  
 kamatrátá **28** (kamatok), **29**  
 kapcsos zárójel {} **12**  
 képhalmaz **92**  
 képlet, középpértékek **100**, **101**  
   átlag **101**  
   medián **100**  
 kördiagram **105**  
 valószínűség **112**  
 terjedelem **102**  
 tapasztalati szórás **103**  
 sűrűség **59**  
 meredekség **80**

átrendezése **60**, **61**, **62**, **63**  
 sorozatok **10**  
 másodfokú egyenlet megoldására **86**  
 sebesség **73**  
 behelyettesítés **77**  
 térfogat **58–59**, **67**, **68**, **69**  
 kúp **59**, **68**  
 kocka **58**  
 henger **67**  
 hasáb **58**  
 gúla **59**  
 gömb **59**, **69**  
 képletek gyorsulás **73**  
   algebrai **75**  
   terület **56–57**  
   kör **57**, **66**  
   ellipszis **69**  
   körcikk **67**  
   háromszög **56**  
   (trigonometriai ismeretek felhasználásával) **63**, **77**  
 kérdőív **97**  
 kerekítés, tizedes törteknél **20**, **86**  
   egész számoknál **9**, **16**  
 kerekítési hiba **20**  
 keresztmetszet **41**, **58**, **69**  
 kerület **53**  
 kétdimenziós alakzat **30**  
   (dimenziók), **31**, **41**, **54**  
 kétértelmű eset **49**, **63**  
 kétmódusú eloszlás **100**  
 kettes alap **6** (számrendszer)  
 kettős egyenlőtlenség **90**  
 kézhez kapott összeg **116**  
   (jövedelem)  
 kicsinyítés **52**  
 kiegészítő szögek **33**  
 kiejtés egynemű tagoknál  
   azonos együtthatók esetén  
   vagy ellentétes  
   együtthatóval **88**  
   ugyanolyan vagy ellentett  
   tagok esetén **87**  
 kifejezni egy mennyiséget egy  
   másik százalékaként **27**  
 kilenclapú test **40** (poliéder)  
 kilencszög **34** (sokszög)



kilogramm (kg) 72  
 (mértékegység) per  
 köbméter (kg/m<sup>3</sup>) 59  
 (sűrűség)  
 kilométer (km) 72  
 (mértékegység) per óra  
 (km/h) 73 (sebesség)  
 kimenetel 112, 113, 114  
 Kínai háromszög 10  
 kisebb  
 mint ( $<$ ) 90  
 vagy egyenlő ( $\leq$ ) 90  
 kisebbik ív 65 (körív)  
 körcikk 65  
 körselet 65  
 kistengely 69 (ellipszis)  
 kiugró értékek 110  
 kivonás ( $-$ ) 14, 15, 16  
 algebrai kifejezésben 76  
 algebrai törteknel 77  
 tizedes törteknel 20  
 törteknel 18  
 hatványoknál 22  
 vektoroknál 46  
 klasszikus valószínűség 112  
 kocka 40, 58  
 kollineáris pontok 30  
 kommutativitás törvénye  
 összeadásra 14, 15, 46  
 szorzásra 14, 15, 46, 76  
 komplementer halmazok 13  
 konkáv sokszög 35, 39  
 poliéder 40  
 konstans 10, 24, 75, 83, 84,  
 85, 93,  
 arányossági tényező (k) 25  
 kontingencia-táblázat 99  
 konvex sokszögek 35  
 poliéderek 40  
 koordináták (x,y) 30, 31  
 (Descartes-féle  
 koordináták), 80, 82, 83,  
 84, 88, 89, 91  
 koplanáris pontok 30  
 korreláció 111  
 koszinusz grafikon vagy  
 koszinusz görbe 64,  
 hányados (cos) 60, 61, 93  
 tétel 62, 63

köb  
 függvény 93  
 grafikonja 83  
 köbgyök 11, 22  
 köbös mértékegységek 58  
 köbszámok 8  
 kölcsönösen kizáró  
 események 113, 114  
 kör egyenlete 84  
 (kör grafikonja) 89,  
 függvények 93  
 grafikon 84  
 kerülete 34, 55, 65, 66, 67,  
 68, 70, 71  
 képlet 66  
 részei 65, 70–71  
 körcikk 67, 68, 105  
 területe 67  
 kördiagram 105  
 körök 47, 51, 55, 57, 65–71  
 körselet 65, 70  
 körző 47, 48, 49, 50, 51, 54  
 középpont  
 köré 70, 65 (bevezetés),  
 hasonlóság 44  
 forgás szimmetriáé 42, 43  
 intervallumosztályé 99  
 közönséges tört 18  
 közös osztó 11, 24  
 közös többszörös 11, 79  
 közüzemi számla 117  
 közvetlen adózás 117  
 kumulatív gyakoriság 99  
 (kumulatív gyakorisági  
 táblázat), 100  
 görbe 109 (kumulatív  
 gyakorisági táblázat)  
 diagram 100, 102, 109,  
 sokszög 109 (kumulatív  
 gyakorisági táblázat)  
 táblázat 99  
 kúpok 56, 59, 68  
 különbség 14 (kivonás),  
 két négyzet különbsége 78  
 külső szög 34, 37, 71  
 kvartilisek 102

## L

láb ( $'$ ) 72 (birodalmi egység)

lapszögek 40  
 lassulás 73  
 legkisebb közös nevező 17  
 (egyenlő törtek) 24  
 legkisebb közös többszörös  
 (LKKT) 11 (közös  
 többszörös)  
 legnagyobb közös osztó  
 (LNKO) 11 (közös osztó),  
 24  
 lehetetlen esemény 112  
 (valószínűségi skála)  
 lehetséges kimenetek 115  
 lehetséges tagok 17  
 (egyenlő törtek), 27  
 leképezés függvény 92  
 transzformáció 43  
 (bevezetés)  
 levéldiagram 108  
 levonás 116 (jövedelem)  
 lineáris egyenlet 81, 88, 89,  
 91  
 függvény 93  
 liter (l) 59, 72 (mértékegység)

## M

macskabajusz 110  
 (dobozdiagram)  
 magasságvonal 41, 56, 57,  
 68, 75  
 maradék 7, 15  
 másodfokú egyenletek 85–86,  
 89  
 kifejezések (lásd  
 négyzetszámok) 78, 82, 85  
 megoldóképlet 86, 89  
 függvények 93 grafikonok  
 82  
 másodfokú függvény 93  
 másodlagos adat 96  
 másodperc (s vagy sec) 74  
 medián 100, 108, 109, 110  
 megbízás 116  
 megfelelő szögek 33  
 megfigyelés 97  
 meghatározások  
 grafikon alatti terület 94–95  
 vektor 46  
 eredeti mennyiség 27



ismert mennyiség adott  
százaléka **27**  
egy háromszög ismeretlen  
szögei **60–61**  
egy háromszög ismeretlen  
oldalai **60–61**  
megközelítőleg egyenlő ( $\approx$ )  
72 (ekvivalens egységek)  
megoldás **79** (bevezetés), **82**,  
**83**  
megoldás  
egyenlőtlenségé **90, 91**  
megtakarítási számla **117**  
meredekség (m) **25, 80, 81** és  
tangens **95**  
grafikoné **94, 95**  
méréses ismerv (adat) **96, 97**,  
**108**  
mérési szög **47**  
hőmérséklet **7**  
méret **72–73**  
méretarány **44, 52, 54**  
méretarányos ábrázolás **51**  
méretarányos nagyítás **44**  
méretarányos rajzolás **52–54**  
méretrajz **52–54**  
mérőöld **72** (birodalmi egység)  
per óra (mph) **73** (sebesség)  
mérleg **116**  
merőleges egyenes **30, 32**,  
**48, 71**  
mértékegység **24, 55, 58**,  
**72–73, 74**  
méter (m) **72** (mértékegység)  
per szekundum (m/s) **73**  
(sebesség) per szekundum  
négyzet (m/s<sup>2</sup>) **73**  
(gyorsulás)  
metrikus mértékegység-  
rendszer **72–73**  
metszet ( $\cap$ ) **13**,  
(halmazműveletek)  
metsző egyenesek **48, 49, 51**  
milligramm (mg) **72**  
(mértékegység)  
milliliter (ml) **59, 72**  
(mértékegység)  
millimásodperc (ms) **74**  
(mértékegység)

milliméter (mm) **72**  
(mértékegység)  
mindig igaz egyenlőtlenség  
**90**  
minősítéses ismerv (adat) **96**,  
**97**  
minta **97, 98**  
mintavétel **98**  
hiba **98**  
módusz **100**  
móduszcsoporthoz vagy osztály  
**100**  
mozaikok **36, 39**  
mozgás **73**  
mutatók szóródási **102–103**

## N

nagyítás **44, 52**  
nagyobb mint ( $>$ ) **90** (relációs  
jel)  
vagy egyenlő ( $\geq$ ) **90**  
(relációs jel)  
nagyobbik ív **65** (körív)  
körcikk **65**  
körselet **65**  
nagyság **45, 46**  
nagytengető **69** (ellipszis)  
napok **74**  
negatív korreláció **111**  
(korreláció)  
negatív szögek **32**  
növekedés **80**  
számok ( $-$ ) **6, 7**  
parabola **82**  
forgatás **43** (elforgatás)  
négyzetgyökök ( $-\sqrt{n}$ ) **11**  
negyed kör **65**  
negyed körív **65**  
négyzetek **34, 39, 71**  
húrnégyzetek **71**  
négyzet **36, 39, 56**  
négyzetes mértékegységek **55**  
négyzetes sorozatok **10**  
négyzetgyökök ( $\sqrt{n}$ ) **9, 11, 22**,  
**78, 86**  
négyzetre emelés **8**  
(négyzetszámok), **21**  
négyzetszám **8, 10, 21, 38**,  
**78, 85**

nem derékszögű háromszög  
**62–63**  
nem egynemű tagok **75**  
(tagok), **76**  
nem független esemény **113**,  
**114, 117**  
nem hivatalos interjú **97**  
(interjú)  
nem ismétlődő (végtelen nem  
szakaszos) tizedestört **19**  
népszámlálás **97**  
nettó jövedelem **116**  
(jövedelem)  
nevezetes mértani helyek **51**  
nevező **9, 17, 18**  
n-szög **34**  
nulladik hatvány szabálya **22**  
nullszög **32**

## NY

nyíl **39**  
nyolcszög **34** (sokszögek)  
nyugdíjpénztár **117**

## O

oda-vissza levéldiagram **108**  
oktaéder **40** (poliéder)  
oldal-növelés **41**  
oldalak **34, 35, 37, 49, 60, 62**  
oldalak arányos csökkentése  
**52**  
oldallap **40**  
poliéderek **41**  
hasáb **41**  
oldal-magasság **41, 68**  
óra **74**  
órmutató  
járásával ellentétes irány  
**32, 43**  
járásával megegyező irány  
**32, 43**  
origó **31**  
oszlopdiagramok **99, 106**,  
**107, 108**  
oszlopvektor **45** (vektorok  
megadása), **46**  
osztályhatárok **99, 107, 109**  
intervallumok **99, 100, 101**,  
**104, 107**



hossz, *lásd* osztályszélesség **99** (osztály-intervallum)  
 méret, *lásd*  
 osztályszélesség, szélesség **99**, 107  
 osztályközös gyakoriság **99**  
 (osztályközös gyakorisági  
 eloszlási táblázat)  
 eloszlás **99** (osztályközös  
 gyakorisági eloszlási  
 táblázat) 100, 101, 102,  
 104, 107  
 tapasztalati szórásának  
 számítása **104**  
 táblázat **99**  
 osztás (:) 14, 15, 16, 76  
 tizedes törttel **20**  
 adott arányban **26**  
 algebrai törtknél **77**  
 törtknél **18**  
 hatványozásnál **22**

**Ö**  
 összeadás (1) 14, 15, 16,  
 algebrai kifejezésekben **76**  
 algebrai törtknél **77**  
 tizedes törtknél **20**  
 törtknél **18**  
 kitevőben **22**  
 vektoroknál **46**  
 szabályai **114**  
 összeg ( $\Sigma$ ) 14, 38, 55, 101  
 összegvektor **46**  
 összegzési szabály **114**  
 összehasonlítás eloszlások  
**102**  
 összetett esemény **113**  
 összetett oszlopdiagram **106**  
 esemény **113**  
 „ötök” összefoglalója **110**  
 ötszög **34** (sokszög), 40, 50

**P**  
 palindrom számok **9**  
 pandigital számok **9**  
 parabola **82**  
 paralelogramma **39**  
 paraméter **55**  
 páratlan számok **7**

párhuzamos **30**, 33, 39, 41,  
 44, 45, 50, 51, 57, 81  
 páros számok **7**  
 Pascal-háromszög **10**  
 pentaéder **40** (poliéder)  
 pénz 28, 29, **116–117**  
 pénzforgalom 28, 29, **116**  
 pénzügyi kifejezések  
**116–117**  
 perc (min) **74**  
 periódus (grafikoné) **64**  
 (szinuszgörbe)  
 pi ( $\pi$ ) 9, 19, 55, **66**  
 piktogram **105**  
 pillanatnyi sebesség **73**, 95  
 pint (pt) **72**  
 Pitagorasz tétel 37, **38**, 45 **60**,  
 68  
 Pitagorasz számhármak **38**  
 Platói testek **40**  
 poliéder (lásd még három  
 dimenziós tárgyak illetve  
 testek) **40–41**  
 térfogatuk **58–59**  
 polinomok **75** (algebrai  
 kifejezések)  
 pontdiagram **110**, **111**  
 pontok (illetve csúcsok) **30**,  
 31, 32, 33, 34, 42, 48, 51  
 pótszögek **33**, 37  
 pozitív szögek **32**  
 korreláció **111**  
 emelkedés **80**  
 számok (+) 6, 7  
 parabola **82**  
 forgatás **43**  
 négyzetgyök ( $\sqrt{n}$ ) **11**  
 prím tényező **11**  
 számok **7**, **11**  
 próbálgatás és finomítás  
 módszere **79**

**R**  
 racionális számok **9**, 12, 78  
 reciprok **18**, 76, 77  
 görbe **84**  
 függvény **93**  
 grafikon 25, **84**  
 regressziós egyenes **111**

relációs jelek **90**  
 relatív gyakoriság **112**  
 rendszeres megfigyelés **97**  
 (megfigyelés) mintavétel **98**  
 részesedés **28**, 29, 116, 117  
 ráta **28**  
 részalmaz ( $\subset$ ) **12**, 13, 92  
 réteg **98** (rétegzett mintavétel)  
 rétegzett mintavétel **98**  
 rombusz **35**, **39**  
 rövidebbik átló **41** (átlók)  
 RPI **117** (infláció)

**S**  
 sávdiagram **106**  
 sebesség 46, **73**, 74, 96  
 sík **30**, 31, 43  
 alakzat **43**  
 szimmetria **42**  
 metszet (testknél) **41**  
 sikeres kimenetel **112**  
 (kimenetel), **113**  
 síknegyed **31**  
 skála **52**  
 skalármennyiség **46**  
 skalárral való szorzás **46**  
 sokszögek **34–35**, 40, 41,  
 50, 55, 56, 57, 107  
 sokszögek feliratozása **35**  
 sorozatok **10**  
 standard eltérés **103**, 104  
 statisztika **96** (bevezetés), **112**  
 stones (st) **72** (birodalmi  
 egység)  
 strigulázás **99**  
 sugár 51, 57, **65**, 66, 67, 68,  
 69, 70, 71  
 súly **72** (tömeg)  
 sűrűség **59**, 73, 94, 95

**SZ**  
 szabályok  
 függvényekre 92–93  
 sorozatokra **10**  
 halmazokra **12**  
 algebraiban **76–79**  
 szabályos sokszögek **35**, 36,  
 40, 41, 50  
 poliéder **40**, 41



hasáb 41  
 gúla 41  
 mozaik 36  
 szakadásos 64 (tangens függvény)  
 szakasz 30, 31, 48, 51  
 szakaszok 81  
 szám 6–31 alap 6  
 (számrendszerek)  
 számegegyes 7  
 (előjeles számok), 90, 92  
 számítás hisztogram alapján gyakoriság 107  
 valószínűség 112–115  
 standard eloszlás 103, 104  
 számítógépes adatbázis 99  
 számlakivonat 117  
 számláló 9, 17, 18, 62  
 számolás (pénzügyi) 28, 29, 116, 117  
 számosság 97, 98  
 számtan 14, 15, 16  
 tizedes törtekkel 20, törtekkel 18  
 vektorokkal 46  
 számtani sorozatok 10  
 százalék (%) 18, 27  
 (bevezetés), 28, 29, 112, 116, 117  
 százalékos változás 28  
 növekedés 28  
 csökkenés 28  
 kamatrátá 29  
 szélsőség 97, 98  
 személyi kölcsön 117  
 jövedelem adó 116  
 szemközti szög 33  
 szerkesztés összetett mértani helyek 51  
 geometriai alakzatok 47–50  
 ívek 47  
 felező egyenesek 48  
 körök 47  
 oldalflező merőleges 48  
 merőleges egyenesek 48  
 szabályos sokszögek 50  
 egyenes oldalú testek 50  
 háromszögek 49  
 szimmetria 37, 39, 42, 69, 82

szimmetriatengely 37, 39, 42  
 szinusz  
 -grafikon vagy görbe 63, 64  
 arány (sin) 60, 61, 93  
 tétel 62, 63  
 hullám 64  
 szórás 102, 108  
 szórásnégyzet 103  
 szorzás ( $\cdot$ ) 14, 15, 16, 21  
 tizedes törttel 20  
 algebrai kifejezésben 76  
 algebrai törtben 77  
 vektort skalárral 46  
 törtéknél 18  
 hatványoknál 22  
 szabálya 114  
 szorzat 14 (szorzás), 25, 56, 78, 101  
 szorzattá alakítás  
 kifejezéseket 78  
 másodfokú egyenleteknél 85, 86, 89  
 szorzó tényező 29 (összetett kamatszámítás rövid módszere)  
 szorzók 28, 29  
 szög szárai 32, 48, 49, 50, 70  
 szögek 32–33, 48, 53, 64, 105  
 lapszög 40  
 körben 70–71  
 elnevezése 70  
 depressziószög 53  
 emelkedési szög 53  
 sokszögekben 34, 35, 37  
 forgatás szöge 43  
 háromszögekben 37, 60–63  
 szögek elnevezése 70  
 szögfüggvények 60–64, 93  
 szögfüggvények grafikonjai 64  
 szögmérő 47, 49, 50, 105  
 szögpárok 33

## T

tagok sorozatban 10  
 algebrai kifejezésekben 75, 78, 79, 88  
 arányban 24

szerkesztés leírásában 48  
 grafikon megadásában 80  
 tangens grafikon vagy tangens görbe 64  
 arány (tg) 60, 61, 62, 93  
 tapasztalati valószínűség 112  
 távolság 73  
 téglalap 35, 39, 56, 67  
 teljes fordulat (egy teljes kör) 32  
 teljes hitelmutató (THM) 116  
 teljes kör 32, 71  
 teljes négyzet 78, 86  
 teljes négyzetté alakítás 86, 89  
 teljes szög 32  
 teljes valószínűség 113  
 (kölcsönösen kizáró események)  
 tengelyek  
 ellipszisé 69  
 forgási szimmetria 41, 42, 43  
 x- és y- 31 (Descartes-féle koordináta-rendszer) 80, 111  
 tényező 11, 78  
 másodfokú egyenlet  
 szorzattá alakítása 85  
 térfogat 58–59, 94, 95  
 kúp 59  
 kocka 58  
 henger 67  
 hasáb 58, 68  
 gúla 59, 68  
 gömb 59, 69  
 térkép 53  
 természetes számok 6, 12, 78  
 tökéletes négyzet 78  
 terület 55–57, 68, 69  
 hisztogramé 107  
 köré 57, 66, 105  
 ellipszisé 69  
 sokszögeké 55–57  
 paralelogramma 57  
 téglalap 56  
 négyzet 56  
 trapéz 57, 94  
 háromszög 56, 63, 77



körcikké 67  
 grafikon alatti 94–95  
 terület  
 grafikon alatti 94–95  
 terv 41  
 testek (lásd poliéderek) 30, 40–41, 48  
 szimmetriák 42  
 transzformációk 43  
 térfogat 58–59  
 tételek Euler- 40  
 Pitagorasz- 37, 38, 45, 60, 68  
 tetraéder 40 (poliéder)  
 tizedes törtek 6, 9, 19, 20, 27, 74  
 tizenegyszög 34 (sokszögek)  
 tizenkétszög 34 (sokszögek), 36  
 tizenötszög 34 (sokszögek)  
 tízes alap 6 (számrendszer)  
 tízes számrendszer 19, 72  
 tízszög 34 (sokszögek)  
 tompaszög 32, 35  
 tompaszögű háromszög 37, 56  
 ton 72 (birodalmi egység)  
 tonna (t) 72 (mértékegység)  
 többcellás táblázat 99  
 többlépcsős mintavétel 98  
 többmódusú eloszlás 100 (kétmódusú eloszlás)  
 többszörös oszlopdiagram 106  
 többszörösen összetett tört 18  
 többtagú kifejezés 75 (algebrai kifejezés)  
 tőke 28 (kamatok), 29  
 tökéletes számok 11  
 tömeg 23, 59, 72, 73, 94, 95, 96  
 tört alakú hatványok 21, 22  
 törtek 6, 9, 17–18, 19, 21, 24, 27, 112  
 algebrai 77  
 százalékban való kifejezése 27  
 tőzsde 117  
 transzformáció 43–44

grafikonoknál 93  
 transzformáció tárgya 43 (bevezetés)  
 trapéz 39, 57, 94  
 trapézsabály 95 (egy görbe alatti terület meghatározása)  
 trapezoid 39  
 trigonometria 60–64  
 trigonometrikus függvények 60–64, 93  
 grafikonok 64  
 trigonometrikus képletek átrendezése 60, 61, 62, 63  
 tudományos elnevezés 21  
 tulajdonságok szögeké, körön belüli szögeké 70–71  
 húrnégyszög szögei 71  
 körök 66  
 számok 6–9  
 sokszögek 34–39  
 poliéderek 30, 40–41  
 érintők 71  
 túlóradíj 117  
 tükör szimmetria 42  
 tükör tengely 42, 43, 44 *lásd még szimmetria tengely*  
 tükrözés 43, 44  
 unió (U) 13 (halmazok uniója)  
 út-idő grafikon 73

Ü

üres halmaz ( $\emptyset$ ) 12  
 üres halmaz (vagy) 12  
 ürmérték 59, 72

V

„vagy”-szabály 114  
 valódi tört 18  
 valós számok 9, 12, 92  
 valószínűségi 10, 112–117  
 skála 112  
 mező 115  
 fadiagram 115  
 valószínűségi mező 115  
 valószínűségi szélsőértékek 112 (valószínűségi skála)  
 váltószögek 33  
 változás grafikonokon 64, 93

változatlan mennyiség 44  
 változó 75, 79, 80, 87, 88, 90  
 véges tizedes tört 19  
 halmaz 12  
 végtelen ( $\infty$ ) 12  
 végtelen szakaszos tizedes tört 9, 19  
 végtelen tizedes tört 19  
 halmaz 12  
 vegyes tizedes tört 19  
 számok 6, 18  
 műveletek 16  
 vektorelnvezések 45  
 vektorok 43, 45–46  
 véletlen esemény 113  
 mintavétel 98  
 Venn-diagram 13  
 viszonyított mennyiségek 24, 25  
 arányok 24  
 halmazok 13  
 visszaverődés szöge 32, 35  
 vízszintes 30, 53, 81, 84, 95, 106, 107, 110

X

x koordináta 31 (Descartes-féle koordináta-rendszer)  
 x tengely 31 (Descartes-féle koordináta-rendszer), 45, 80, 81, 93, 94, 95  
 x tengelymetszete 80

Y

y koordináta 31 (Descartes-féle koordináta-rendszer)  
 y tengely 31 (Descartes-féle koordináta-rendszer), 45, 80, 81, 93, 94, 95  
 y tengelymetszete 80, 81  
 yard (yd) 72 (birodalmi egység)

Z

z tengely 31 (dimenziók)  
 zárójelek 16  
 algebrai kifejezésekben 76, 78, 79  
 zéró szög 32



## Közreműködtek:

### Website-tanácsadó

Lisa Watts

### Fotók

23. oldal: ©UC Regents/lick Observatory; 35. oldal: GlobeXplorer\*

### Márkanevek

Macintosh és Quicktime az USA-ban és más országokban hivatalosan bejegyzett

Apple Computer-termékek.

Real One Player az USA-ban és más országokban hivatalosan bejegyzett RealNetworks-termék.

Flash and Shockwave az USA-ban és más országokban hivatalosan bejegyzett

Macromédia-termék.

Az Usborne Kiadó kizárólag a saját honlapja elérhetőségének és tartalmának megbízhatóságáért vállal felelősséget.

Az Usborne Kiadó semmilyen felelősséget nem vállal az általa ajánlott weboldalakon található kártékony,

ellenséges vagy pontatlan információkért, illetve

az ezen oldalakról esetlegesen letöltött vírusok által okozott károkért.

Első kiadás ©2003, Usborne Publishing Ltd,

Usborne House, Saffron Hill 83-85, London EC1N 8RT, England.

Copyright ©2003, Usborne Publishing Ltd.

Az Usborne név és a *(két képcske)* eszközök az Usborne Publishing Ltd márkanevei.

Minden jog fenntartva. Tilos a kiadvány bármely részének a kiadó előzetes engedélye nélküli másolása, tárolása vagy továbbítása bármilyen formában, legyen az elektronikus, mechanikus, fénymásolt vagy bármilyen más módszer.

Olaszországban nyomtatva.

\* A kiadó mindent megtett a könyvben található anyagok szerzői jogainak felderítéséért. Ha bármilyen jogot figyelmen kívül hagyunk, akkor ezt a későbbi kiadásokban pótoljuk, miután ezt jelezték nekünk! A kiadó köszönetét fejezi ki minden érintett szervezetnek és egyénnek a közreműködésért, illetve az anyagaik újraközlésére adott engedélyért.

A fordítás alapjául szolgáló eredeti mű címe:

The Usborne Illustrated Dictionary of Maths

Copyright © 2000 Usborne Publishing Ltd.

Usborne House, 83-85 Saffron Hill, London EC1N 8RT, England. [www.usborn.com](http://www.usborn.com)

**Szöveg: Tori Large**

**Tervező és rajzoló: Adam Constantine**

**Tanácsadók: Paul Metcalf, Wendy Troy**

Magyar kiadás: © Novum Kiadó, 2004

Felelős kiadó: Jankovics László

Fordította: Koromné Beck Zsuzsanna

Szakmailag ellenőrizte: Mátyás Andrea

Kiadóvezető: Tóth-Kása Ottília

Olvasószerkesztő: Gellér Tibor

Műszaki szerkesztő és borítóterv: Meseldžija Zoran

Tördelés: Meseldžija Dragana

Nyomdai előkészítés: Novum Kft.

Készült a Novum Nyomdában, Szeged

Felelős vezető: Budincsevich József

ISBN 963 9334 56 1

Minden jog fenntartva. A jogtulajdonos előzetes engedélye nélkül tilos a kiadványt adatrögzítő rendszeren tárolni, elektronikus, mechanikus, fénymásolási, hangvételi vagy egyéb eljárással sokszorosítani.



# MATEMATIKA KÉPES SZÓTÁR

Bárkinek, aki matematikát tanul, szüksége lehet erre a könyvre. Tömör magyarázataival, példákkal és diagramokkal gondoskodik a magabiztos megértésről, ami a feladat sikeres megoldásának a kulcsa lehet.

FORMÁK, TEREK ÉS MÉRTEK

## GEOMETRIAI SZERKESZTÉS

A szerkesztés a geometriai alakzatok ábrázolása. Néhányat meg lehet szerkeszteni körző és vonalzó segítségével, de van, amelyhez szögmérő is szükséges.

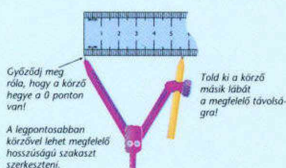
### Körző

A matematikában körök\* és körívek\* rajzolására használt eszköz. Használjuk a távolságok vonalzóról papírra vagy az ábra egyik részéről a másik részére történő átmásolására. A körzőnek egy pontból kiinduló két láb van. Az egyik végében grafithegy található, a másik vége a körző hegye, amely körül forog a körző.



### Körző használata

Mielőtt elkezdenéd, zárd össze a körzőt, s győződj meg arról, hogy mindkét szára egy pontba mutat. A szerkesztendő távolság beállításához helyezd a körző hegyét a vonalzón 0 pontjához. Tedd a körző másik hegyét a megfelelő ponthoz.

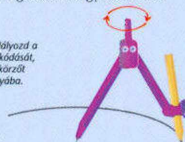


Internetes oldalak: Geometriai szerkesztéssel kapcsolatos, hasznos weboldalakat találhat az [www.usborne-quicklinks.com](http://www.usborne-quicklinks.com) címen.

### Körív vagy kör rajzolása körzővel

Fogd meg a körzőt a hüvelyk- és mutatóujjaddal. Fordasd a körzőt az óramutató járásának megfelelően, vigyázva, hogy a körző mindkét szárát egyformán nyomd a papírra, és rajzold meg a kört\* vagy a körívet\*.

Hogy megakadályozd a körző összecsuksodását, döntsd meg a körzőt a forgatás irányába.

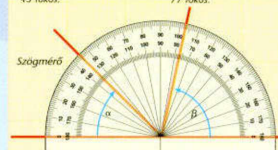


### Szögmérő

Szögek mérésére és megrajzolására szolgáló eszköz. A szögmérő általában átlátszó, lapos, kör vagy félkör alakú eszköz, melynek a szélén feltüntetik a szögeket. Amikor szöget mérsz vele, mindig a nullás beosztásnál legyen az egyik szögszár.

Az  $\alpha$  szög – a külső skáláról leolvasva – 45 fokos.

A  $\beta$  szög – a belső skáláról leolvasva – 77 fokos.



Homorúság\* mérésekor először mérjük meg azt a szöveget\*, amely ezt  $360^\circ$ -ra egészíti ki, majd ennek értékét (amely  $0^\circ$  és  $180^\circ$  közötti) vonjuk le a  $360^\circ$ -ból.

Az  $\alpha$  szög meghatározásához mérjük meg a  $\beta$ -t először, aztán ezt vonjuk le a  $360^\circ$ -ból.

Példa: ha a  $\beta$  szög =  $85^\circ$   
 $360^\circ - 85^\circ = 275^\circ$   
 akkor az  $\alpha$  szög =  $275^\circ$



47

- Több mint 500 világos definíció a matematika minden területéről.
- Több mint 300 rajz és diagram teszi világosabbá az egyes összefüggéseket.
- Több mint 100 kidolgozott példa segít áttenni az elméleti tételeket a gyakorlatba.

Mindenre kiterjedő lábjegyzetek és részletes tárgymutató teszi könnyebbé az információkhoz való hozzáférést.

Minden témakörhöz kapcsolódnak internet-elérhetőségek, weblapok.

ISBN 963-9334-56-1



9 796334 563