

BACCALAURÉAT
SESSION 2020Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Une entreprise achète, utilise et revend des machines à coudre après un certain nombre d'années.
Le tableau suivant donne l'évolution du prix Y de vente d'une machine en fonction du nombre d'années X d'utilisation.

Nombre x_i d'années	1	2	3	4	5	6
Prix y_i (en milliers de francs CFA)	150	125	90	75	50	45

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Unités graphiques : en abscisse, 1 cm pour une année ; en ordonnée, 1 cm pour 20 000 F.

- Représente le nuage de points associés à la série statistique (X, Y) .
- Détermine les coordonnées du point moyen G du nuage de points de cette série statistique.
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
 - On note $V(X)$ la variance de X et $\text{Cov}(X, Y)$ la covariance de (X, Y) .
Démontre que : $V(X) = \frac{35}{12}$ et $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{255}{4}$.
- On admet que la variance $V(Y)$ de Y est égale à 1445.
 - Justifie que le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (X, Y) est $\frac{-3\sqrt{21}}{14}$.
 - Justifie qu'il existe une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y .
- Soit (D) la droite de régression de Y en X .
Démontre, par la méthode des moindres carrés, qu'une équation de (D) est : $y = -\frac{153}{7}x + \frac{497}{3}$.
- Détermine le prix de vente d'une machine à coudre à la fin de la 7^e année.
On arrondira le résultat au multiple le plus proche de 5.

EXERCICE 2

- On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^3 + (1 + i)z^2 + (2 - 2i)z + 8i = 0$.
 - Justifie que $2i$ est une solution de (E).
 - Justifie que : $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (1 + i)z^2 + (2 - 2i)z + 8i = (z - 2i)[z^2 + (1 + 3i)z - 4]$.
 - Résous dans \mathbb{C} l'équation (E') : $z^2 + (1 + 3i)z - 4 = 0$.
 - Déduis des questions précédentes la résolution dans \mathbb{C} de l'équation (E).
- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-3i$; $1 - i$; $2i$ et $-2 - 2i$.
 - Place les points A, B, C et D sur votre feuille de copie.
 - Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.
- Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.
 - Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z - 2 + 2i$.
 - Démontre que $S(B) = C$.
 - Détermine l'image du triangle BAD par la similitude S.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g définie et dérivable sur \mathbb{R} par : $g(x) = 2x - e^{-x}$.

- Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- Démontre que la fonction g est strictement croissante sur \mathbb{R} , puis dresse son tableau de variation.
- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans \mathbb{R} . On la note α .
 - Justifie que : $0,3 < \alpha < 0,4$.
- Justifie que : $\forall x \in]-\infty, \alpha[, g(x) < 0$;
 $\forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x - 1)(2e^x - 1)$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
Donne une interprétation graphique des résultats obtenus.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x + 2(x - 1)e^x$.
 - Démontre que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.
 - Étudie la position relative de (C_f) et (D).

3. On suppose que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.

a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$.

b) Étudie le sens de variation de f .

c) Dresse le tableau de variation de f .

4. a) Résous dans \mathbb{R} l'équation : $f(x) = 0$.

b) Déduis-en les coordonnées des points d'intersection A et B de (C_f) et de l'axe des abscisses.
On choisira : $x_A < x_B$ (x_A et x_B étant les abscisses respectives de A et B).

5. Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

6. Trace les droites (D) et (T), puis construis (C_f) .

On prendra : $\alpha = 0,35$ et $f(\alpha) = -1,2$.

7. À l'aide d'une intégration par parties, calcule l'aire en cm^2 , de la partie du plan délimitée par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

SERVICE BACCALAUREAT

BACCALAUREAT - SESSION 2020

EPREUVE : MATHEMATIQUES DATE : 2020 HEURE :
SERIE(S) : D

CORRIGE ET BAREME

CORRIGE ET BAREME	BAREME
<p>CORRIGE</p> <p>Le barème est national. Il ne peut être modifié.</p> <p>Certaines réponses ont été rédigées à titre indicatif. Cependant, toute autre démarche correcte sera acceptée.</p> <p>Le correcteur devra tenir compte de la démarche qui a conduit au résultat.</p> <p>A un résultat correct non justifié ou incorrectement justifié on accordera la moitié des points sauf si la question est notée sur 0,25. Dans ce cas, on attribuera la note zéro.</p> <p>Toute faute sera sanctionnée une seule fois.</p> <p>En conséquence, on appréciera les réponses en fonction des résultats obtenus précédemment par le candidat même si les résultats intermédiaires sont faux.</p>	

CORRIGE

EXERCICE 1 (04 pts)

1. Voir annexe 1

2. a) $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{21}{6} = 3.5$

$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{535}{6}$

$G\left(\frac{7}{2}; \frac{535}{6}\right)$

b) $V(x) = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{35}{12}$

$Cov(x, y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y} = \frac{745}{3} - 3.5 \times \frac{535}{6}$

$Cov(x, y) = -\frac{255}{4}$

3. a) $V(y) = 1445$

$r = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{V(x) \cdot V(y)}} = \frac{-3\sqrt{21}}{14}$

b) $r \approx -0,98$

On a : $0,87 < |r| < 1$ il y a une forte Corrélation linéaire entre x et y.

4. Une équation de la droite (D) est de la forme

$y = ax + b$

où $a = \frac{Cov(x, y)}{V(x)} = \frac{-153}{7}$

$b = \bar{y} - a\bar{x} = \frac{497}{3}$

Donc (D) : $y = -\frac{153}{7}x + \frac{497}{3}$

5. Pour $x = 7$; $y = \frac{38}{3}$

Donc $y \approx 12,666$

le prix de vente d'une machine à la fin de la 7^e année est 12 665 FCFA.

0,5

0,25

0,25

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

CORRIGE

BAREME

Exercice 2 (05 pts)

1. a) $(2i)^3 + (1+i)(2i)^2 + (2-2i)(2i) + 8i = 0$ - - -

0,25

Donc $2i$ est une solution de (E).

b) $(z-2i)[z^2 + (1+2i)z - 4] = z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i$

0,50

Toute démonstration Correcte est acceptée.

c) (E') : $z^2 + (1+2i)z - 4 = 0$

$\Delta = 8 + 6i = (3+i)^2$

0,25 x 2

des solutions de (E') sont : $1-i$ et $-2-2i$

0,25 x 2

$S_{E'} = \{1-i; -2-2i\}$

d) (E) $\Leftrightarrow z-2i=0$ ou $z^2 + (1+2i)z - 4 = 0$ 0,25

Donc $S_E = \{2i; 1-i; -2-2i\}$ 0,25

0,50

2. a) Voir annexe 2

0,25 x 4

b) $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$; donc BAD est rectangle et isocèle en A

0,50

Toute démonstration Correcte est acceptée.

3 a) d'écriture complexe de S est de la forme

$z' = az + b$

$S(D) = D$ et $S(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} a(-2-2i) + b = -2-2i \\ a(-3i) + b = 1-i \end{cases}$

0,25

Donc : $z' = (1+i)z - 2 + 2i$

0,50

b) $(1+i)(1-i) - 2 + 2i = 2i$; donc : $S(B) = C$

0,25

c) $\begin{matrix} & S \\ \begin{matrix} D & D \\ A & B \\ B & C \end{matrix} & \end{matrix}$

0,25

d'où l'image par S de DAB est DBC

CORRIGE

Problème (11 pts)

PARTIE A (3,5 pts)

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

$0,25 + 0,25$

0,50

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$0,25 + 0,25$

0,50

0,25

2. $\forall x \in \mathbb{R}; g'(x) = 2 + e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}; g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur \mathbb{R} .

0,25

Tableau de variation de g .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

0,50

3. a) La fonction g est continue sur \mathbb{R} (car dérivable) et strictement croissante sur \mathbb{R} .

De plus $g(-\infty; +\infty) =]-\infty; +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans \mathbb{R} .

0,50

b) On a $g(0,3) \approx -0,14$ et $g(0,4) = 0,12$

$g(0,3) \times g(0,4) < 0$ donc $0,3 < \alpha < 0,4$

0,50

4. g est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha[$ d'où

$\forall x \in]-\infty; \alpha[\quad g(x) < g(\alpha); g(\alpha) = 0$

g est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[\quad g(x) < g(x)$ et $g(\alpha) = 0$

0,50

d'où $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

CORRIGE

BAREME

PARTIE B (7,5 pts)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 0,25 + 0,25

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ 0,25 + 0,25

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc (\mathcal{C}_f) admet une

branche parabolique de direction celle de (Δ)

2. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b) Toute démonstration correcte est acceptée.

c) $f(x) = (1-x) = 2(x-1)e^x$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2(x-1)e^x = 0$ donc $(\Delta): y = 1-x$ est une

asymptote à (\mathcal{C}_f) en $-\infty$.

d) $\forall x \in]-\infty; 1[; f(x) - (1-x) < 0$ donc (\mathcal{C}_f) est au dessous de (Δ)

$\forall x \in]1; +\infty[; f(x) - (1-x) > 0$ donc (\mathcal{C}_f) est au dessus de (Δ) .

Pour $x = 1$ (\mathcal{C}_f) et (Δ) se coupent au point I.

3. a) Toute démonstration correcte est acceptée.

$\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = e^x g(x)$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

$\forall x \in]-\infty; \alpha[; f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$.

$\forall x \in]\alpha; +\infty[; f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

c)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

CORRIGE

BAREME

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\ln 2$
 $SR =]-\ln 2; 1[$

0,25x2

b) (C_f) et (OI) se coupent en $A(-\ln 2)$ et $B(1)$

0,25x2

5.a) $f'(0) = -1$ et $f(0) = -1$ donc $(T): y = -x - 1$

0,50

6. Voir annexe 3) (D) et (T) - - - -
 (C_f) - - - -

0,25x2

0,50

7. $A = \int_0^1 [(1-x) - f(x)] dx \cdot u_a$

0,25

$A = -2 \int_0^1 (x-1) e^x dx \cdot u_a$

$A = [-2(x-1)e^x]_0^1 + 2 \int_0^1 e^x dx \cdot u_a$

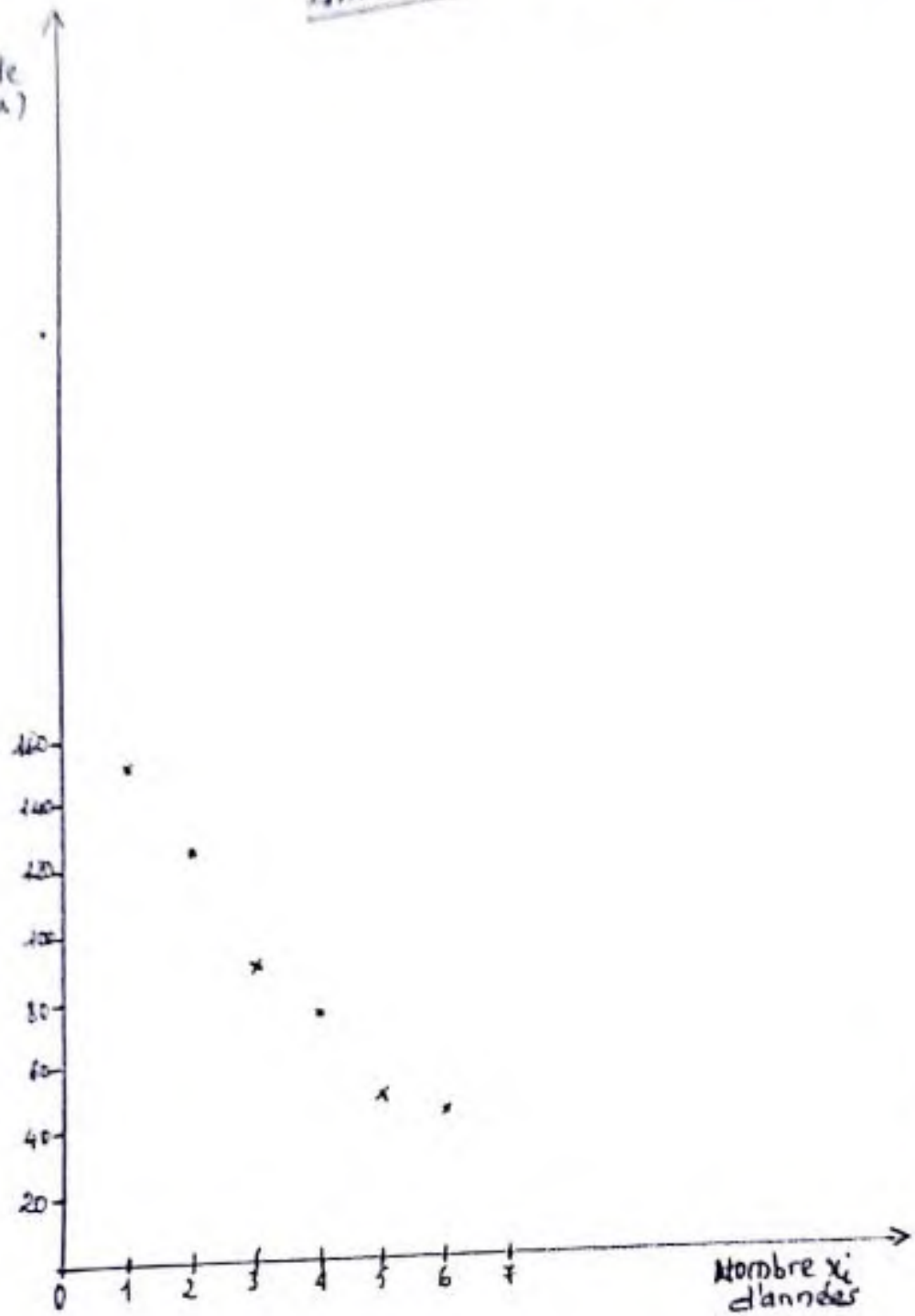
0,25

$A = 2(e-2) \times 4 \text{ cm}^2$

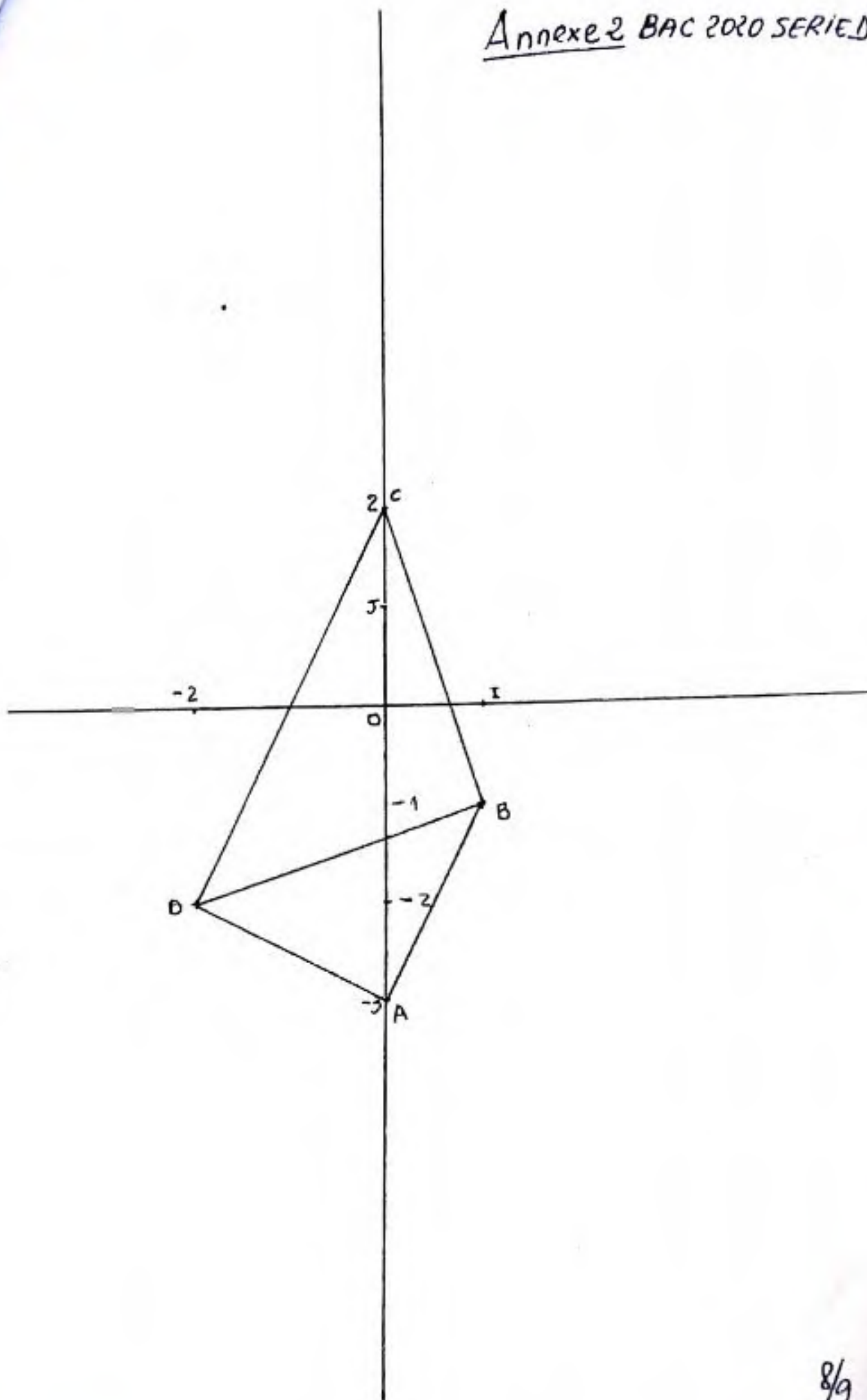
0,25

Annexe 1 BAC 2020 SÉRIE D

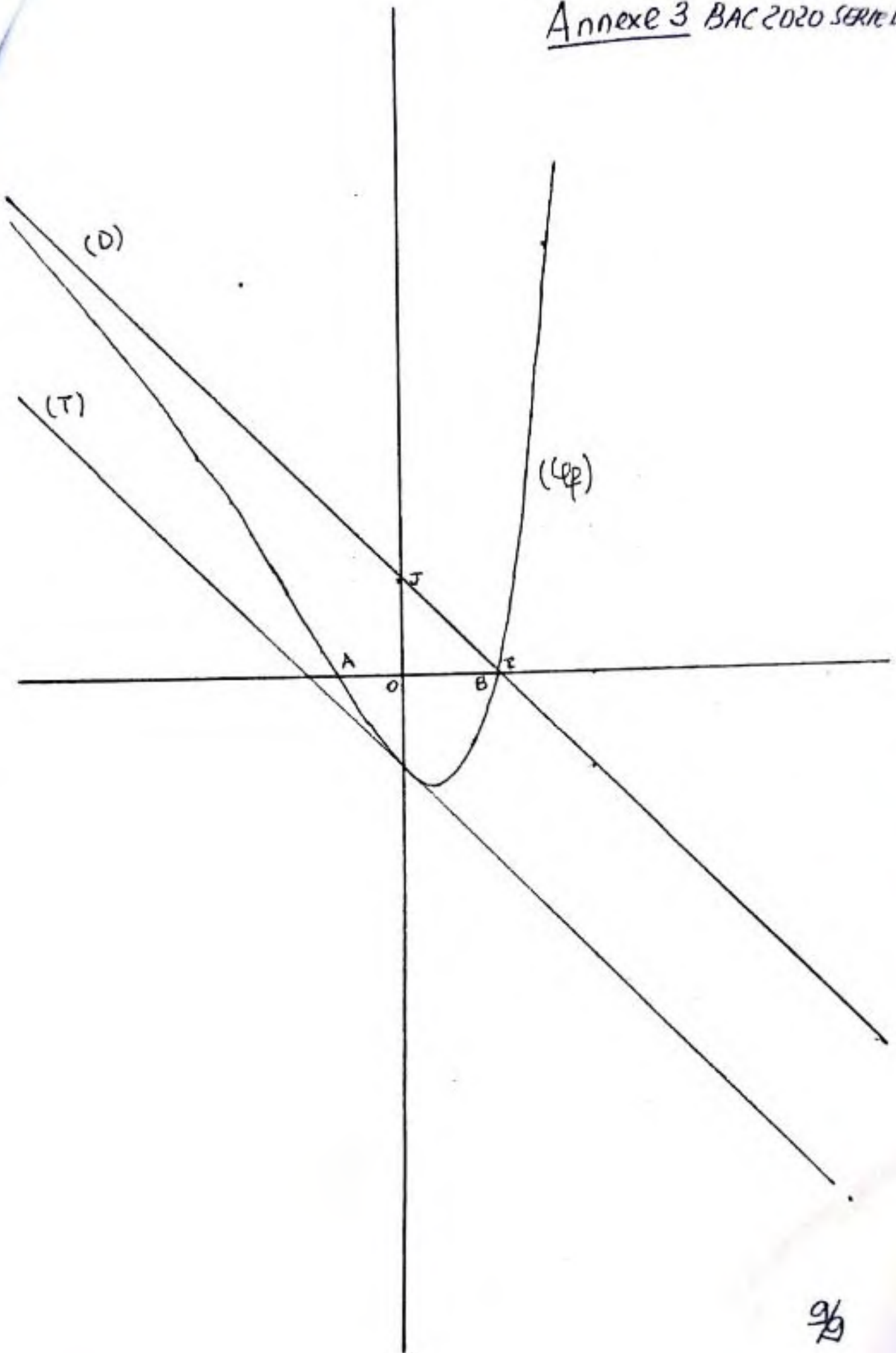
Prix x_i
(en milliers de
Francs CFA)



Annexe 2 BAC 2020 SERIED



Annexe 3 BAC 2020 SERIE D



9/9