



Módulo 7

Geometría

Guía de Ejercicios

Índice

Unidad I. Conceptos y elementos de geometría.

Ejercicios Resueltos pág. 02

Ejercicios Propuestos pág. 09

Unidad II. Áreas y perímetros de figuras planas.

Ejercicios Resueltos pág. 13

Ejercicios Propuestos pág. 20

Unidad III. Volúmenes de cuerpos geométricos.

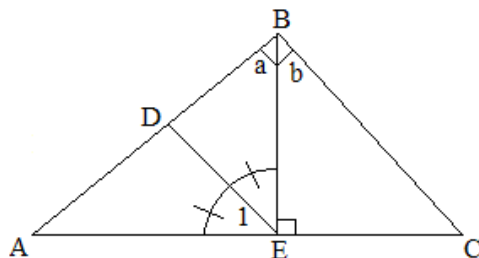
Ejercicios Resueltos pág. 22

Ejercicios Propuestos pág. 27

Unidad I. Conceptos y elementos de geometría

Ejercicios Resueltos

1. En el dibujo adjunto:



- a) Localizar y nombrar dos pares de rectas perpendiculares
- b) Hallar $\angle a$ si $\angle b = 42^\circ$
- c) Hallar $\angle AEB$ y $\angle CED$

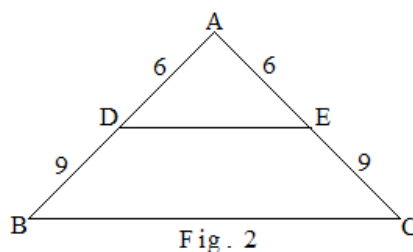
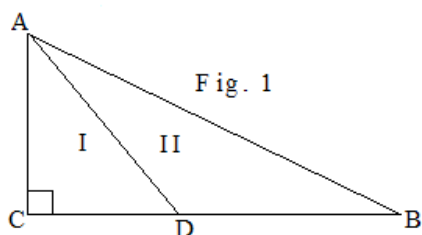
Solución

- a) Puesto que $\angle ABC$ es un ángulo recto, $AB \perp BC$.
Puesto que $\angle BEC$ es un ángulo recto, $BE \perp AC$.

b) $\angle a = 90^\circ - \angle b = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$

c) $\angle AEB = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
 $\angle CED = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

2. En la figura 1, señalar:

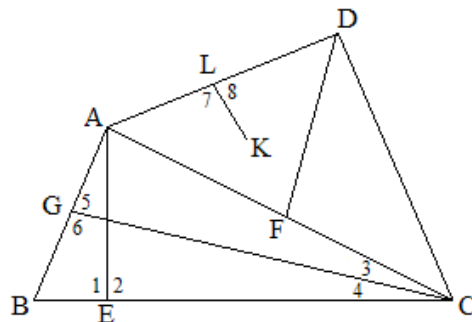


- Un triángulo obtusángulo
- Dos triángulos rectángulos y sus hipotenusas y catetos
- En la figura 2, indicar dos triángulos isósceles, y los correspondientes lados iguales, bases y ángulos en el vértice.

Solución

- Puesto que el $\angle ADB$ es obtuso, $\triangle ADB$ o $\triangle I$ es obtusángulo.
- Puesto que el $\angle C$ es recto, $\triangle I$ y $\triangle ABC$ son rectángulos. En el $\triangle I$, AD es la hipotenusa y AC y CD son los catetos. En el $\triangle ABC$, AB es la hipotenusa y AC y BC son los catetos.
- Puesto que $AD = AE$, $\triangle ADE$ es un triángulo isósceles. En el $\triangle ADE$, AD y AE son los lados iguales, DE es la base y $\angle A$ es el ángulo del vértice.
Puesto que $AB = AC$, $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles. En el $\triangle ABC$, AB y AC son los lados iguales, BC es la base y $\angle A$ es el ángulo del vértice.

3. Marcar los segmentos y ángulos que se muestran en el dibujo adjunto:

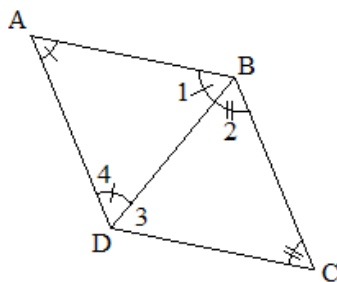


- a) Si AE es la altura correspondiente a BC .
- b) Si CG es bisectriz del $\angle ACB$.
- c) Si KL es la mediatriz de AD .
- d) Si DF es la mediana correspondiente a AC .

Solución

- a) Puesto que $AE \perp BC$, $\angle 1 = \angle 2$
- b) Puesto que CG bisecta el $\angle ACB$, $\angle 3 = \angle 4$
- c) Puesto que KL es mediatriz de AD , $AL = LD$ y $\angle 7 = \angle 8$
- d) Puesto que DF es la mediana correspondiente a AC , $AF = FC$

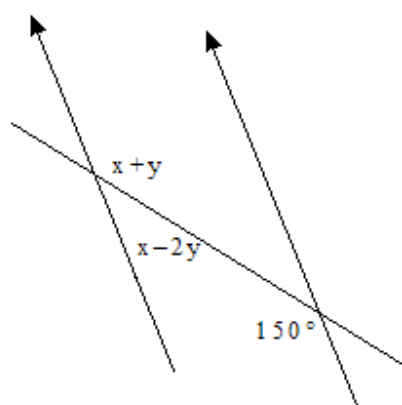
4. En el siguiente caso, establecer cuáles son los lados iguales que se oponen a ángulos iguales.



Solución

Puesto que $\angle A = \angle 1 = \angle 4$, $AB = BD = AD$
 Puesto que $\angle 2 = \angle 3$, $BD = CD$

5. En el siguiente caso, hallar x e y



Solución

$$x + y = 150$$

$$x - 2y = 30$$

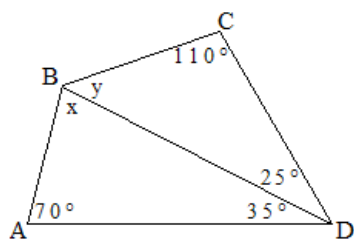
$$3y = 120$$

$$y = 40$$

$$x + 40 = 150$$

$$x = 110$$

6. En el siguiente caso, hallar x e y .

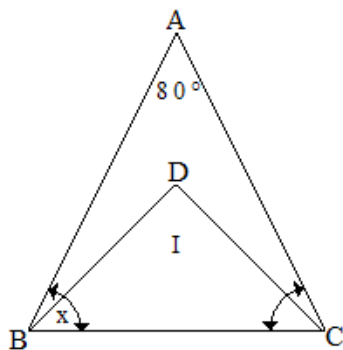


Solución

$$\begin{aligned} x + 35 + 70 &= 180 \\ x &= 75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y + 110 + 25 &= 180 \\ y &= 45 \end{aligned}$$

7. En el siguiente caso, hallar x e y .



Solución

Como $AB = AC$, $\angle x = \angle y$

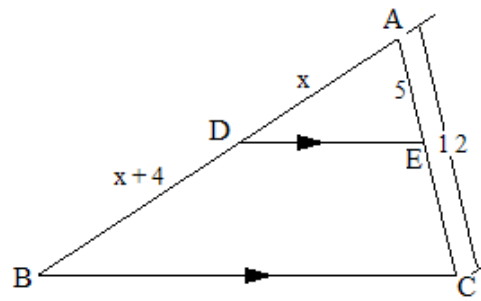
$$\begin{aligned} 2x + 80 &= 180 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

En $\triangle ABC$,

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + y = 180$$

$$\begin{aligned}
 x + y &= 180 \\
 50 + y &= 180 \\
 y &= 130
 \end{aligned}$$

8. Hallar x en el siguiente caso.

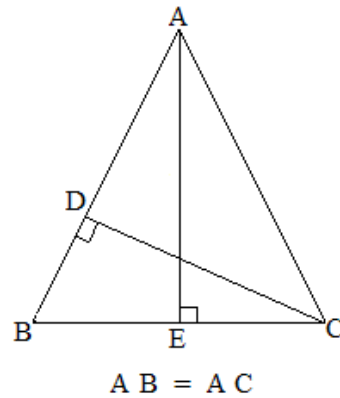


Solución

$EC = 7$. $DE \parallel BC$; de donde

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{x+4} &= \frac{5}{7} \\
 7x &= 5x + 30 \\
 x &= 10
 \end{aligned}$$

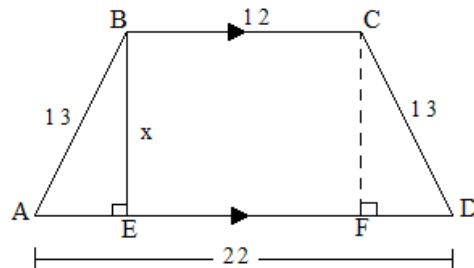
9. En el siguiente caso, determinar los ángulos que pueden utilizarse para demostrar que los triángulos $\triangle AEC$ y $\triangle CDB$ son semejantes.



Solución

Los $\angle AEC$ y $\angle BDC$ son rectos. El $\angle B = \angle ACE$, pues en todo triángulo, ángulo opuestos a lados iguales son iguales.

10. En el siguiente caso hallar x si $ABCD$ es un trapecio.



Solución

$EF = BC = 12$, $AE = \frac{1}{2}(22 - 12) = 5$. Entonces:

$$x^2 = 13^2 - 5^2$$

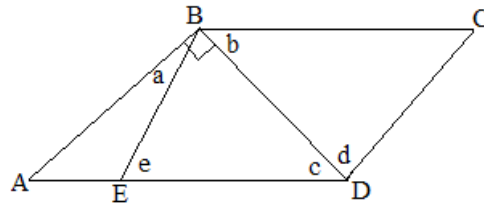
$$x^2 = 144$$

$$x = 12$$

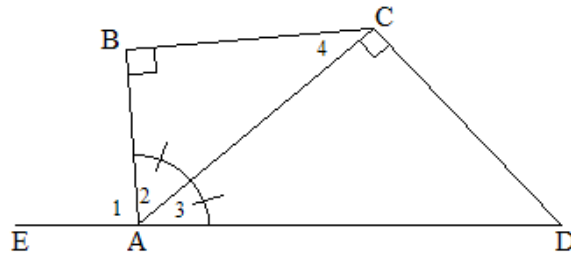
Ejercicios Propuestos

1. Hallar:

- a) $\angle ADC$ si $\angle c = 45^\circ$ y $\angle d = 85^\circ$.
- b) $\angle AEB$ si $\angle e = 60^\circ$.
- c) $\angle EBD$ si $\angle a = 15^\circ$.
- d) $\angle ABC$ si $\angle b = 42^\circ$.



2. En el dibujo que se muestra:



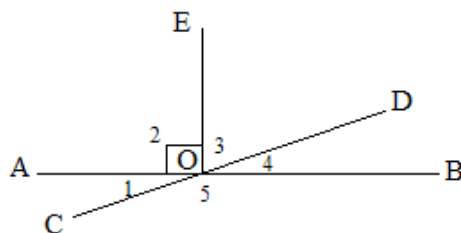
- a) Nombrar dos pares de rectas perpendiculares.
- b) Hallar $\angle BCD$ si $\angle 4$ es 39° .

Si $\angle 1 = 78^\circ$, hallar: c) $\angle BAD$

d) $\angle 2$

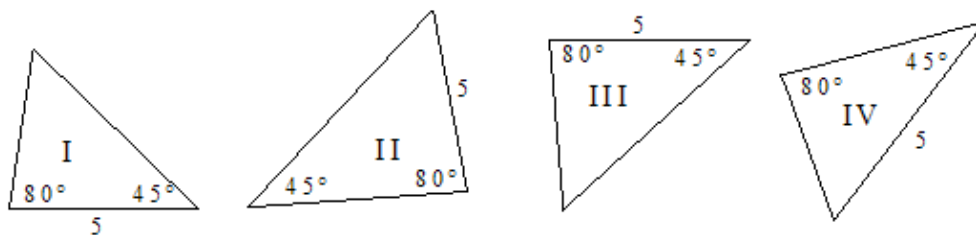
e) $\angle CAE$

3. Establecer la relación que existe entre cada par de ángulos

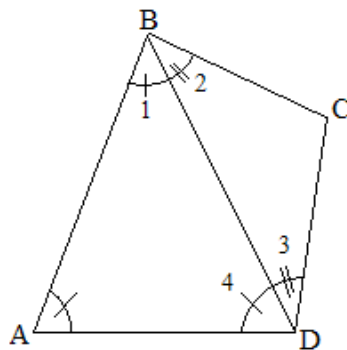


- a) $\angle 1$ y $\angle 4$
- b) $\angle 3$ y $\angle 4$
- c) $\angle 1$ y $\angle 2$
- d) $\angle 4$ y $\angle 5$
- e) $\angle 1$ y $\angle 3$
- f) $\angle AOD$ y $\angle 5$

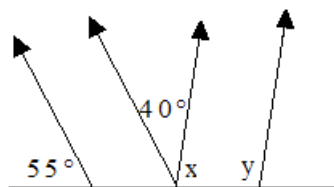
4. Buscar los triángulos congruentes y establecer el criterio de congruencia respectivo.



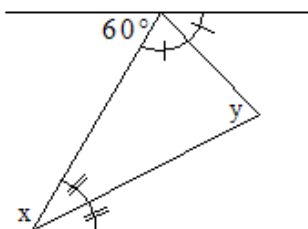
5. Indicar los lados iguales que se oponen a ángulos iguales de un triángulo.



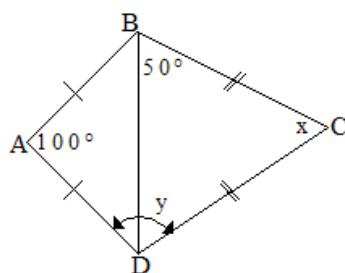
6. Hallar x e y en el siguiente caso.



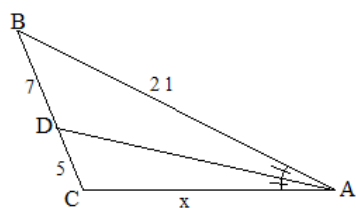
7. Hallar x e y en el siguiente caso.



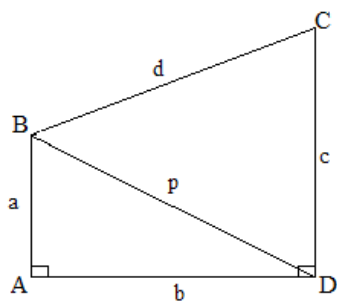
8. Hallar x e y en el siguiente caso.



9. Hallar x en el siguiente caso.



10. En el trapecio $ABCD$.

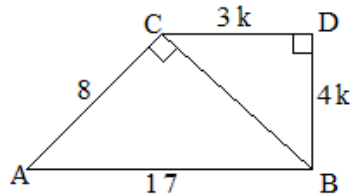


- a) Hallar d si $a = 11$, $b = 3$ y $c = 15$.
- b) Hallar a si $d = 20$, $b = 12$ y $c = 36$.
- c) Hallar d si $a = 5$, $p = 13$ y $c = 14$.
- d) Hallar p si $a = 20$, $c = 28$ y $d = 17$

Unidad II. Áreas y perímetros de figuras planas.

Ejercicios Resueltos

1. Encontrar el perímetro de la siguiente figura.



Solución

el valor del lado BC es:

$$\begin{aligned}17^2 &= 8^2 + x^2 \\17^2 - 8^2 &= x^2 \Rightarrow x = 15\end{aligned}$$

Para en triángulo II, el valor de k resulta ser:

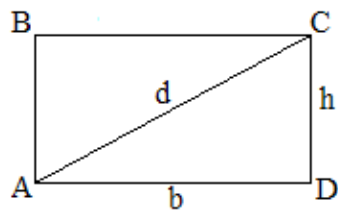
$$\begin{aligned}15^2 &= (3k)^2 + (4k)^2 \\&= 25k^2 \Rightarrow k = 3\end{aligned}$$

Entonces, $P = 8 + 17 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 46$

2. Hallar

- a) el área de un rectángulo si la base es de 15 y el perímetro es 50
- b) el área de un rectángulo si la altura es 10 y la diagonal es 26
- c) la base y la altura de un rectángulo si su área es 70 unidades cuadradas y su perímetro es 34

Solución



a) $p = 50$, $b = 15$. Puesto que:

$$\begin{aligned} p &= 2b + 2h \\ 50 &= 2 \cdot 15 + 2h \Rightarrow h = 10 \end{aligned}$$

De donde: $A = bh = 15 \cdot 10 = 150$

b) $d = 26$, $h = 10$. En el $\triangle ACD$ rectángulo,

$$\begin{aligned} d^2 &= b^2 + h^2 \\ 26^2 &= b^2 + 10^2 \Rightarrow b = 24 \end{aligned}$$

De donde: $A = bh = 24 \cdot 10 = 240$

c) $A = 70$, $p = 34$. Puesto que,

$$\begin{aligned} p &= 2b + 2h \\ 34 &= 2(b + h) \Rightarrow h = 17 - b \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A &= bh \\ 70 &= b(17 - b) \\ b^2 - 17b + 70 &= 0 \Rightarrow b = 7 \text{ o } b = 10 \end{aligned}$$

Puesto que $h = 17 - b$, se obtiene $h = 10$ cuando $b = 7$ o $h = 7$ cuando $b = 10$

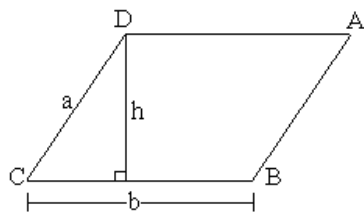
3. Hallar

- a) el área de un paralelogramo cuyos lados son de 20 y 10 unidades y forman entre sí un ángulo de 59°
- b) el área de un paralelogramo si ésta se representa por $x^2 - 4$, un lado por $x + 4$ y la altura correspondiente a él por $x - 3$
- c) Dado un paralelogramo, hallar la altura si el área es de 54 unidades cuadradas y la altura y la base están en la razón 2 : 3

Solución

a) $b = 20$, $a = 10$, $\angle C = 45^\circ$

$$\begin{aligned} A &= ab \sen C \\ &= 10 \cdot 20 \cdot \sen 59^\circ \\ &= 200 \cdot 0,8572 \\ &= 171,44 \end{aligned}$$



b) $A = x^2 - 4$, $b = x + 4$ y $h = x - 3$. Entonces,

$$\begin{aligned} A &= bh \\ x^2 - 4 &= (x + 4)(x - 3) \\ &= x^2 + x - 12 \Rightarrow x = 8 \end{aligned}$$

De donde $A = x^2 - 4 = 64 - 4 = 60$

c) $h = 2x$, $b = 3x$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= bh \\ 54 &= 3x \cdot 2x \\ &= 6x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

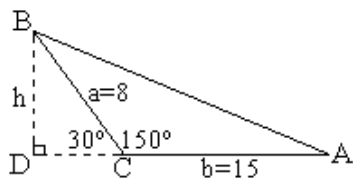
De donde $h = 2x = 2 \cdot 3 = 6$

4. Hallar el área de un triángulo

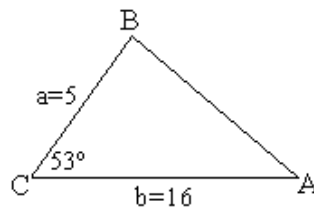
- a) si tiene dos lados de 15 y 8 unidades que abarcan un ángulo de 150°
b) si tiene dos lados de 16 y 5 unidades que forman entre sí un ángulo de 53°

Solución

a)



b)



a) $b = 15$, $a = 8$. Puesto que $\angle BCA = 150^\circ$, $\angle BCD = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. En el $\triangle BCD$, h es el opuesto al $\angle BCD$, de aquí, $h = \frac{1}{2}a = 4$. Entonces

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4 = 30$$

b) $a = 5$, $b = 16$ y $\angle C = 53^\circ$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ab \sin 53^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 16 \cdot \sin 53^\circ \\ &= 40 \cdot 0,7986 = 32 \end{aligned}$$

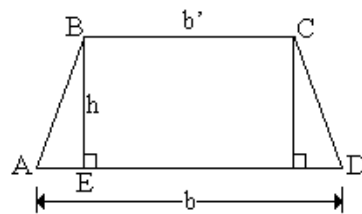
5. Hallar

a) el área de un trapecio si las bases son 7,3 unidades y 2,7 unidades y la altura es de 3,8 unidades

b) el área de un trapecio isósceles si sus bases tiene 22 y 10 unidades y los lados iguales valen 10 unidades cada uno

c) las bases de un trapecio isósceles si el área es de $53\sqrt{3}$, la altura es de $4\sqrt{3}$ y los lados iguales miden 8 unidades cada uno

Solución



a) $b = 7,3$, $b' = 2,7$, $h = 3,8$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}h(b + b') \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3,8(7,3 + 2,7) \\ &= 19 \end{aligned}$$

b) $b = 22$, $b' = 10$, $AB = 10$, $EF = B' = 10$, $AE = \frac{1}{2}(22 - 10) = 6$. En el $\triangle BEA$, $h^2 = 10^2 - 6^2 = 54$ y $h = 8$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}h(b + b') \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8(22 + 10) \\ &= 128 \end{aligned}$$

c) $AE = \sqrt{(AB)^2 - h^2} = \sqrt{64 - 48} = 4$, $FD = AE = 4$, $b' = b - (AE - FD) = b - 8$. Entonces

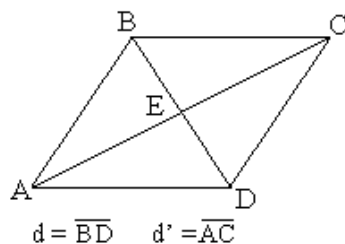
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}h(b + b') \\ &= \frac{1}{2}h(2b - 8) \end{aligned}$$

O sea, $52\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3}(2b - 8)$, de lo cual se deduce $26 = 2b - 8 \Rightarrow b = 17$ y $b' = b - 8 = 17 - 8 = 9$

6. Hallar

- a) el área de un rombo si una de las diagonales mide 30 unidades y el lado mide 17
- b) una de las diagonales de un rombo si la otra mide 8 unidades y su área es de 52 unidades cuadradas.

Solución



a) $d' = 30$, $s = 17$. En el $\triangle AEB$ rectángulo,

$$\begin{aligned} s^2 &= \left(\frac{1}{2}d\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d'\right)^2 \\ 17^2 &= \left(\frac{1}{2}d\right)^2 + 15^2 \\ \frac{1}{2}d &= 8 \Rightarrow d = 16 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}dd' \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 30 = 240 \end{aligned}$$

b) $d' = 8$, $A = 52$. Entonces,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}dd' \\ 52 &= \frac{1}{2}d8 \Rightarrow d = 13 \end{aligned}$$

7. Hallar la relación de las áreas de dos triángulos semejantes si:

- a) la razón de dos lados correspondientes es 3:5
- b) sus perímetros miden 12 y 7 unidades

Solución

a)

$$\frac{A}{A'} = \left(\frac{s}{s'}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

b)

$$\frac{A}{A'} = \left(\frac{p}{p'}\right)^2 = \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{144}{49}$$

8. Hallar la relación de un par de:

a) lados homólogos si la razón de las áreas es 4:9

b) medianas homólogas si las áreas tienen 250 y 10 unidades cuadradas

Solución

a)

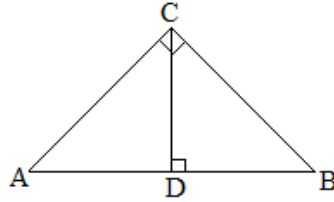
$$\left(\frac{s}{s'}\right)^2 = \frac{A}{A'} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{s}{s'} = \frac{2}{3}$$

b)

$$\left(\frac{m}{m'}\right)^2 = \frac{A}{A'} = \frac{250}{10} \Rightarrow \frac{m}{m'} = 5$$

Ejercicios Propuestos

1. En el triángulo rectángulo ABC, se tiene que $\overline{AD} = 3$, $\overline{BD} = 12$ y $\overline{CD} = 6$. Encontrar el valor de $\overline{AC} + \overline{BC}$



2. Hallar

- a) el lado de un cuadrado si el área es igual a $6\frac{1}{4}$
- b) el perímetro de un cuadrado si el área es igual a 169
- c) la diagonal de un cuadrado si el área es igual a 50

3. Hallar el área de un paralelogramo si:

- a) el área se representa por x^2 , la base por $x - 3$ y la altura por $x - 2$
- b) el área se representa por $x^2 - 10$, la base por x y la altura por $x - 2$
- c) el área se representa por $2x^2 - 34$, la base por $x + 3$ y la altura por $x - 3$

4. Hallar el área de:

- a) un triángulo si tiene dos lados contiguos de 8 y 5 unidades que forman un ángulo de 30°
- b) un triángulo cuyos lados son iguales a 10, 10 y 16
- c) un triángulo isósceles cuya base es 30 y cuyos lados iguales miden 17
- d) un triángulo isósceles cuya base es igual a 20 y su ángulo del v'ertice mide 68°
- e) un triángulo isósceles cuya base es igual a 30 y sus ángulos de la base miden 62°
- f) un triángulo rectángulo si el cateto opuesto al ángulo de 30° mide 6

5. Hallar

- a) la altura de un trapecio si las bases son iguales a 13 y 7 y el área es igual a 40
- b) la altura de un trapecio si la suma de sus bases es igual al doble de la altura, y el área es igual a 49
- c) las bases de un trapecio si la base menor tiene 3 unidades menos que la mayor, la altura es igual a 4 y el área es igual a 30

6. Hallar el área de un rombo si:

- a) las diagonales son 8 y 9
- b) las diagonales son $3x$ y $8x$
- c) una de las diagonales es 10 y el lado es 13
- d) el perímetro mide 40 y una de las diagonales 12
- e) el lado mide 6 y uno de los ángulos 30°
- f) el perímetro es 32 y la diagonal mejor es igual al lado
- g) el lado es igual a 14 y uno de los ángulos 120°

7. Dado un rombo, hallar

- a) una diagonal, si la otra mide 7 y el área 35
- b) las diagonales, si la razón entre ellas es 4:3 y el área es 54
- c) el lado, si el área es igual a 24 y una diagonal es igual a 6
- d) el lado, si el área es igual a 6 y una diagonal tiene cuatro unidades más que la otra

8. Dados dos triángulos semejantes, hallar la razón de

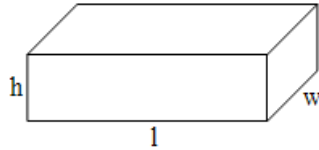
- a) lados homólogos, si las áreas son iguales a 72 y 50
- b) medianas homólogas, si la razón de las áreas es 9:49
- c) alturas homólogas, si las áreas miden 18 y 6
- d) los perímetros, si las áreas miden 50 y 40

Unidad III. Volúmenes de cuerpos geométricos.

Ejercicios Resueltos

1. Hallar el volumen de un paralelepípedo rectángulo cuya longitud es de 6 cm, su anchura es de 4 cm y su altura es de 10 cm.

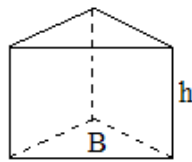
Solución



$$\begin{aligned} V &= lwh \\ &= 6 \cdot 4 \cdot 10 \text{ cm}^3 \\ &= 240 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

2. Hallar el volumen de un prisma de altura igual a 15 cm y cuya base triangular mide 12 cm^2 .

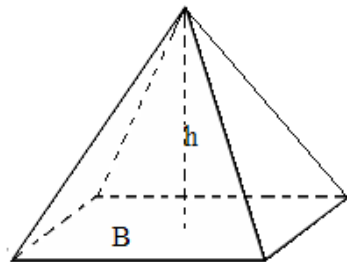
Solución



$$\begin{aligned} V &= Bh \\ &= 15 \cdot 12 \text{ cm}^3 \\ &= 180 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

3. Hallar el volumen de una pirámide de altura igual a 8 cm y cuya base es un cuadrado de lado igual a 4 cm.

Solución



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} Bh \\ &= \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 8 \text{ cm}^3 \\ &= 42,6 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

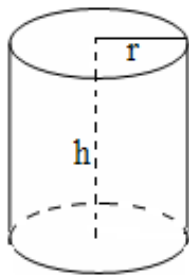
4. Hallar el volumen de una esfera cuyo radio es de 10 cm.

Solución

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} (3,14) 10^3 \text{ cm}^3 \\ &= 4186,6 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

5. Hallar el volumen de un cilindro de altura igual a 4 cm y cuya base tiene radio igual a 2 cm.

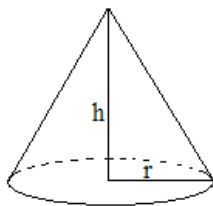
Solución



$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= (3,14) \cdot 2^2 \cdot 4 \text{ cm}^3 \\ &= 50,24 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

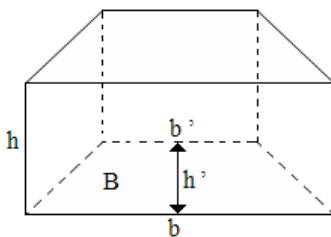
6. Hallar el volumen de un cono de altura igual a 2 cm y cuya base tiene un radio de 3 cm.

Solución



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} (3,14) \cdot 3^2 \cdot 2 \text{ cm}^3 \\ &= 18,84 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

7. A partir de la expresión $V = Bh$, el volumen de un prisma o de un cilindro, obtener la fórmula del volumen del siguiente cuerpo.

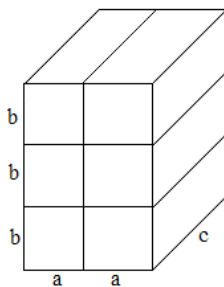


Solución

Puesto que $B = \frac{h'}{2}(b + b')$, entonces

$$V = \frac{hh'}{2}(b + b')$$

8. Encontrar la fórmula para el volumen del siguiente cuerpo.

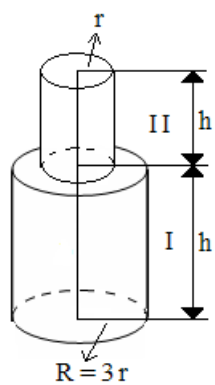


Solución

Se utiliza $V = lwh$, donde: $l = 2a$, $w = c$ y $h = 3b$, entonces

$$V = 2a \cdot c \cdot 3b = 6abc$$

9. Encontrar la fórmula para el volumen del siguiente cuerpo.

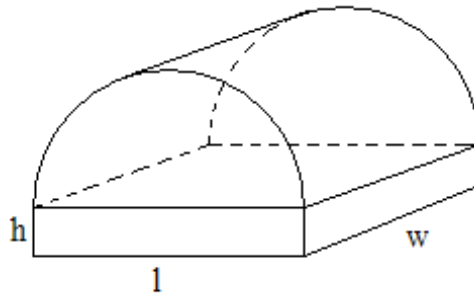


Solución

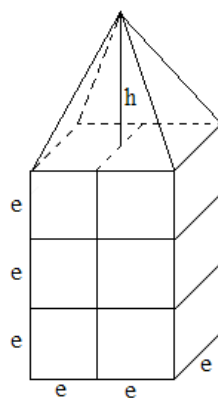
$$\begin{aligned} V &= \text{volumen I} + \text{volumen II} \\ &= \pi R^2 h + \pi r^2 h \\ &= \pi (3r)^2 h + \pi r^2 h \\ &= 10\pi r^2 h \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1. Calcular el volumen de un paralelepípedo rectángulo cuya longitud es de 3 cm, su anchura de 8 cm y su altura de 0,4 m.
2. Calcular el volumen de un prisma cuya altura es de 2 cm y su base es un cuadrado de lado igual a 3 cm.
3. Calcular el volumen de una pirámide que tiene una altura igual a 0,02 m y cuya base tiene un área de 6 cm^2 .
4. Calcular el volumen de una esfera de radio igual a 6 cm.
5. Calcular el volumen de un cilindro de altura igual a 0,1 m y base de radio igual a 2 cm.
6. Calcular el volumen de un cono que tiene altura igual a 60 cm y cuya base tiene un radio de 4,5 m.
7. Obtener la fórmula para el siguiente cuerpo.



8. Obtener la fórmula para el siguiente cuerpo.



9. Obtener la fórmula para el siguiente cuerpo.

