

## I- الجداء السلمي

### 1- تعريف

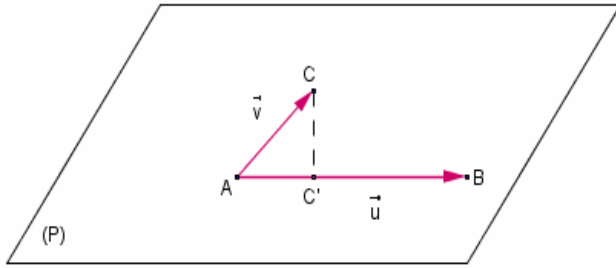
لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء، و  $A$  و  $B$  و  $C$  نقط من الفضاء حيث  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .  
يوجد على الأقل مستوى  $(P)$  ضمن الفضاء يمر من النقط  $A$  و  $B$  و  $C$ .  
الجداء السلمي للمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  في الفضاء هو الجداء السلمي  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  في المستوى  $(P)$  نرمز له بـ  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

ملحوظة

جميع خاصيات الجداء السلمي في المستوى تمتد إلى الفضاء

### 2- نتائج

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء، و  $A$  و  $B$  و  $C$  نقط من الفضاء



حيث  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .  
\* إذا كان  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $\vec{v} \neq \vec{0}$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$   
\* إذا كان  $\vec{u} = \vec{0}$  أو  $\vec{v} = \vec{0}$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$   
\* إذا كان  $\vec{u} \neq \vec{0}$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$  حيث  $C'$  المسقط العمودي لـ  $C$  على  $(AB)$   
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) *$$

### 3- منظم متجهة

لتكن  $\vec{u}$  متجهة و  $A$  و  $B$  نقطتين من الفضاء حيث  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$   
العدد الحقيقي  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  يسمى المربع السلمي لـ  $\vec{u}$  و يكتب  $\vec{u}^2 = AB^2$   
العدد الحقيقي الموجب  $\sqrt{\vec{u}^2}$  يسمى منظم المتجهة  $\vec{u}$  نكتب  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

### ملاحظة و كتابة

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 *$$

\* إذا كان  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $\vec{v} \neq \vec{0}$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$

### 4- خاصيات

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ (\vec{u} - \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \end{aligned}$$

متطابقات هامة

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in V_3^3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} * \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} * \\ (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} &= \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} * \\ \vec{u} \cdot \alpha \vec{v} &= \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) * \end{aligned}$$

### 5- تعامد متجهتين :

#### تعريف

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء  $V_3$ .  
تكون  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدين إذا وفقط إذا كان  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  نكتب  $\vec{u} \perp \vec{v}$

**ملاحظة** المتجهة  $\vec{0}$  عمودية على أية متجهة من الفضاء  $V_3$

#### تمرين

المكعب ABCDEFGH الذي طول حرفه a  
أحسب  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$  و  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$  و  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB}$

## II- صيغة تحليلية

### 1- الأساس و المعلم المتعامدان الممنظمان

#### تعريف

لتكن  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  ثلاث متجهات غير مستوائية من الفضاء  $V_3$  و 0 نقطة من الفضاء.

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  أساس للفضاء  $V_3$

يكون الأساس  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  متعامد (أو المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  متعامد) إذا وفقط إذا كانت المتجهات  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  متعامدة متنى متنى.

يكون الأساس  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  متعامد و ممنظم (أو المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  تعامد و ممنظم) إذا وفقط إذا كانت

المتجهات  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  متعامدة متنى متنى و  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

### 2- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

#### أ- خاصة

الفضاء منسوب إلى معلم م.م.م  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

إذا كانت  $\vec{u}(x; y; z)$  و  $\vec{v}(x'; y'; z')$  فان  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

**ملاحظة** إذا كانت  $\vec{u}(x; y; z)$  بالنسبة للمعلم م.م.م  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  فان

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = x \quad ; \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = y \quad ; \quad \vec{u} \cdot \vec{k} = z$$

#### ب- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة بين نقطتين

\*- إذا كانت  $\vec{u}(x; y; z)$  بالنسبة للمعلم م.م.م  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  فان  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

\*- إذا كانت  $A(x_A; y_A; z_A)$  و  $B(x_B; y_B; z_B)$  بالنسبة للمعلم م.م.م  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad \text{فان}$$

#### تعيين

نعتبر  $A(1; 1; \sqrt{2})$  و  $B(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$  و  $C(-1; -1; -\sqrt{2})$

بين أن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية

### 3- تحديد تحليلي لمجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\vec{u} \cdot \vec{MA} = k$

لتكن  $\vec{u}(a; b; c)$  متجهة غير منعدمة و  $A(x_A; y_A; z_A)$  نقطة من الفضاء

نعتبر  $M(x; y; z)$

$$\vec{u} \cdot \vec{MA} = k \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

#### خاصة

لتكن  $\vec{u}(a; b; c)$  متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء

مجموعة النقط M من الفضاء بحيث  $\vec{u} \cdot \vec{MA} = k$  هي مستوى معادلته  $ax + by + cz + d = 0$  حيث d عدد حقيقي

**مثال** نعتبر  $\vec{u}(2; -1; 1)$  متجهة و  $A(1; -1; 2)$  نقطة من الفضاء

حدد مجموعة النقط M من الفضاء بحيث  $\vec{u} \cdot \vec{MA} = -1$

## III- تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء

### 1- تعامد المستقيمت و المستويات في الفضاء

#### أ- تعامد مستقيمتين

ليكن  $(D_1)$  و  $(D_2)$  مستقيمتين من الفضاء موجهين بالمتجهتين  $\vec{u}_1$  و  $\vec{u}_2$  على التوالي

$$(D_1) \perp (D_2) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

#### ب- تعامد مستقيم و مستوى

#### خاصة

ليكن (P) مستوى موجه بالمتجهتين  $\vec{u}_1$  و  $\vec{u}_2$  و (D) مستقيم موجه بالمتجهة  $\vec{u}_3$

$$(D) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_3 \quad \text{و} \quad \vec{u}_2 \perp \vec{u}_3$$

### ج- ملاحظات واصطلاحات

- \* المتجهة  $\vec{u}$  الموجهة لمستقيم (D) العمودي على مستوى (P) تسمى متجهة منتظمة للمستوى (P).
- \* إذا كانت  $\vec{u}$  منتظمة لمستوى (P) فإن كل متجهة  $\vec{v}$  مستقيمة مع  $\vec{u}$  تكون منتظمة للمستوى (P)
- \* إذا كانت  $\vec{u}$  منتظمة لمستوى (P) و  $\vec{v}$  منتظمة لمستوى (P') وكانتا  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين فإن (P) و (P') متوازيان
- \* إذا كان  $(A; B) \in (P)^2$  و  $\vec{u}$  منتظمة لمستوى (P) فإن  $\vec{u} \perp \overline{AB}$

**تمرين** في الفضاء المنسوب إلى معلم م.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

حدد تمثيل بارامترى للمستقيم (D) المار من  $A(-1; 2; 0)$  و العمودي على المستوى (P) الموجه بالمتجهتين  $\vec{u}(1; -1; 1)$  و  $\vec{v}(2; 1; 1)$

**تمرين**

في الفضاء المنسوب إلى معلم م.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نعتبر المستوى

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(P) الذي معادلته  $ax - 2y + z - 2 = 0$  و المستقيم (D) تمثيله بارامترى

1- حدد متجهتين موجهتين للمستوى (P)

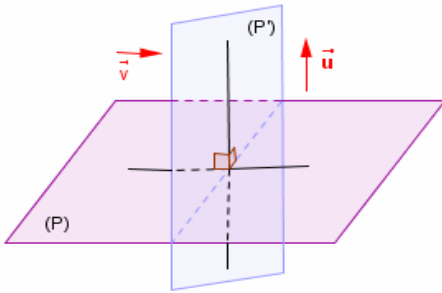
2- حدد  $a$  و  $b$  لكي يكون  $(D) \perp (P)$

### د- تعامد مستويين

تذكير يكون مستويان متعامدين إذا و فقط إذا اشتمل أحدهما على مستقيم عمودي على المستوى الآخر.

**خاصة**

ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء و  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين منتظمتين لهما على التوالي  $\vec{u} \perp \vec{v}$  إذا و فقط إذا كان  $(P') \perp (P)$



### 2- معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منتظمة عليه

**a. مستوى محدد بنقطة و متجهة منتظمة عليه**

**مبرهنة**

لتكن  $\vec{u}$  متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء  
\* المستوى المار من A و المتجهة  $\vec{u}$  منتظمة له هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث  $\overline{AM} \cdot \vec{u} = 0$   
\* مجموعة النقط M من الفضاء حيث  $\overline{AM} \cdot \vec{u} = 0$  المستوى المار من A و المتجهة  $\vec{u}$  منتظمة له

**b. معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منتظمة عليه**

**خاصة**

\* كل مستوى (P) في الفضاء و  $\vec{u}(a; b; c)$  منتظمة عليه يقبل معادلة ديكارتية من نوع  $ax + by + cz + d = 0$   
\* كل معادلة ديكارتية من نوع  $ax + by + cz + d = 0$  حيث  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$  هي معادلة مستوى (P) في الفضاء بحيث  $\vec{u}(a; b; c)$  منتظمة عليه

**تمرين**

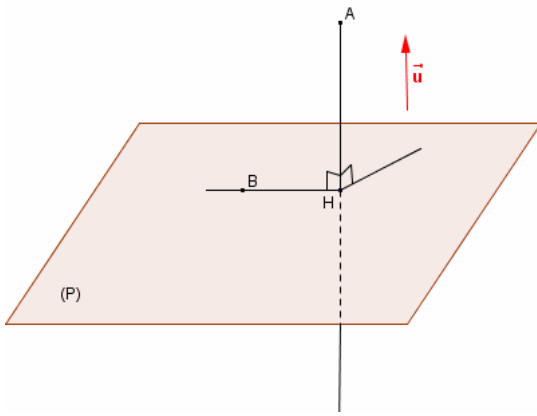
$$(D): \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad (P): 2x - y + 3z + 1 = 0$$

نعتبر

- 1- حدد متجهة  $\vec{u}$  منتظمة على (P) ونقطة منه.
- 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من  $A(2; 0; 3)$  و  $\vec{n}(1; 2; 1)$  منتظمة عليه.
- 3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من  $A'(2; 0; 3)$  و العمودي على (D)
- 4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من  $A(2; 0; 3)$  و الموازي لـ (P)

### -3- مسافة نقطة عن مستوى

#### 1- تعريف و خاصية



الفضاء منسوب إلى معلم م.م.م  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$   
مسافة نقطة A عن مستوى (P) هي المسافة AH  
حيث H المسقط العمودي لـ A على (P) نكتب

$$d(A; (P)) = AH = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$$

حيث  $B \in (P)$  و  $\vec{u}$  منظمية على (P)

#### 2- خاصية

ليكن (P) مستوى معادلته  $ax + by + cz + d = 0$  و نقطة من الفضاء  $A(x_0; y_0; z_0)$

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

#### مثال

ليكن (P) مستوى مار من  $B(2; 1; 3)$  و  $\vec{u}(1; -1; \sqrt{2})$  منظمية عليه لتكن  $A(1; 2; 0)$

حدد  $d(A; (P))$

#### تمارين 1

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

نعتبر  $A(1; -1; 1)$  و  $B(3; 1; -1)$  و (P) المستوى ذا المعادلة  $2x - 3y + 2z = 0$  و (D) المستقيم الممثل

$$\begin{cases} x = 3t \\ x = -2 - 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{بارا متريا بـ}$$

1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A والعمودي على المستقيم (D)

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q') المار من A و B والعمودي على المستوى (P)

2- أحسب  $d(A; (P))$  و  $d(A; (D))$

3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q'') المار من B و الموازي للمستوى (P)

#### تمارين 2

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة  $3x + 2y - z - 5 = 0$  و (D) المستقيم المعروف بـ

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P') الذي يتضمن (D) و العمودي على (P)

### IV- معادلة فلكة

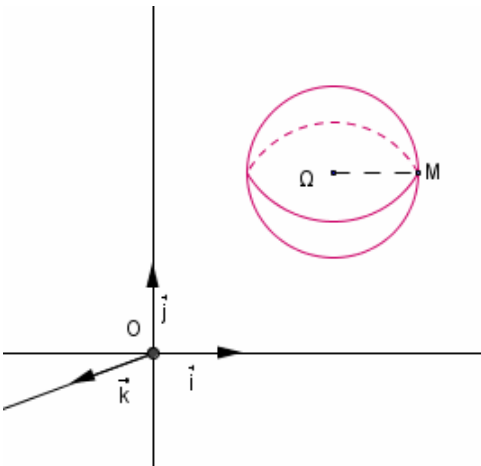
الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

#### 1- معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها

لتكن  $\Omega(a; b; c)$  نقطة من الفضاء (E) و  $r \in \mathbb{R}^{*+}$  و الفلكة  $S(\Omega; r)$  التي مركزها  $\Omega$  و شعاعها r

ليكن  $M(x; y; z)$  من الفضاء (E)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow M \in S(\Omega; r)$$



## مراجعة

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .  
معادلة ديكارتية للفلكة  $S(\Omega; r)$  التي مركزها  $\Omega(a; b; c)$  و شعاعها  $r$  هي  
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

## ملاحظات و اصطلاحات

- \* إذا كان  $A$  و  $B$  نقطتين من الفلكة  $S(\Omega; r)$  حيث  $\Omega$  منتصف  $[A; B]$  فان  $[A; B]$  قطرا للفلكة
- \* توجد فلكة وحيدة أحد أقطارها  $[A; B]$  مركزها  $\Omega$  منتصف  $[A; B]$  و شعاعها  $r = \frac{1}{2} AB$
- \* للفلكة  $S(\Omega; r)$  معادلة ديكارتية من شكل  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + \delta = 0$  حيث  $a$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  أعداد حقيقية.

\* **الفلكة**  $S(O; r)$  حيث  $O$  أصل المعلم معادلتها  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

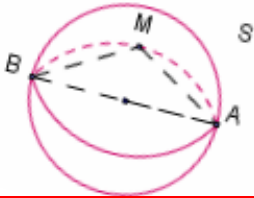
\* **الكرة**  $S(\Omega; r)$  لتكن  $S(\Omega; r)$  فلكة التي مركزها  $\Omega(a; b; c)$  و شعاعها  $r$

الكرة  $B(\Omega; r)$  التي مركزها  $\Omega(a; b; c)$  و شعاعها  $r$  هي مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  حيث  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq r^2$

## 2- معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها

$S$  فلكة أحد أقطارها  $[A; B]$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow M = B \text{ أو } M = A \text{ أو } [AMB] \Leftrightarrow M \in S$$



## مراجعة

$A$  و  $B$  نقطتان مختلفتان في الفضاء

في الفضاء مجموعة النقط  $M$  التي تحقق  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$  هي فلكة التي أحد أقطارها  $[A; B]$

## خاصة

إذا كانت  $A(x_A; y_A; z_A)$  و  $B(x_B; y_B; z_B)$  نقطتين مختلفتين فان معادلة الفلكة التي أحد أقطارها  $[A; B]$  هي  
 $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$

## تمارين

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر  $\Omega(1; 2; -1)$  و  $A(2; 1; 2)$  و  $B(4; 1; 2)$

1- حدد معادلة ديكارتية للفلكة  $S$  التي مركزها  $\Omega$  و المار من  $A$

2- حدد معادلة ديكارتية للفلكة  $S'$  التي قطرها  $[A; B]$

## 3- دراسة المعادلة $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (1)

لتكن  $E$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  التي تحقق المعادلة (1)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d \Leftrightarrow M \in E$$

لتكن  $\Omega(a; b; c)$

\*- إذا كان  $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$  فان  $E = \emptyset$

\*- إذا كان  $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$  فان  $E = \{\Omega\}$ . فلكة مركزها  $\Omega$  و شعاعها منعدم

\*- إذا كان  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$  فان  $E = S(\Omega; r)$  حيث  $a^2 + b^2 + c^2 - d = r^2$

## مراجعة

$a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  أعداد حقيقية

تكون مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  التي تحقق المعادلة  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  فلكة

إذا وفقط إذا كان  $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$

نعتبر  $E$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  التي تحقق المعادلة  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 5 = 0$

بين إن  $E$  فلكة محددا عناصرها المميزة

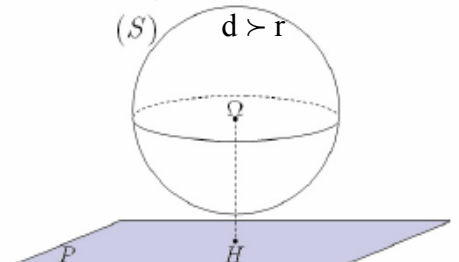
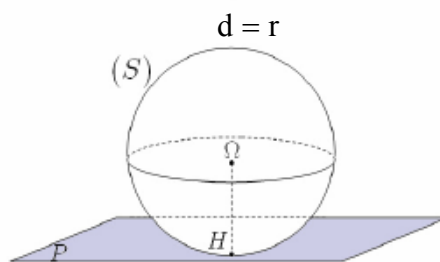
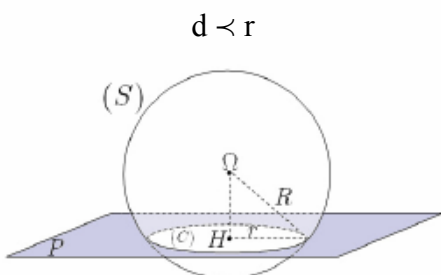
نعتبر  $E$  مجموعة النقط  $M$  التي تحقق  $2MA^2 + 3MB^2 = 16$  حيث  $A(2; 0; -1)$  و  $B(-1; 1; -1)$

## II - تقاطع مستوى و فلكة

### 1- تقاطع للفلكة $S(\Omega; r)$ و المستوى $(P)$

في الفضاء  $E$  نعتبر الفلكة  $S(\Omega; r)$  و المستوى  $(P)$  و النقطة  $H$  المسقط العمودي لـ  $\Omega$  على المستوى  $(P)$

نضع  $d(\Omega; (P)) = H\Omega = d$



### خاصية

ليكن (P) مستوى في الفضاء و S فلكة مركزها  $\Omega$  و شعاعها r و H المسقط العمودي لـ  $\Omega$  على المستوى (P) يكون تقاطع (P) و S :

\* دائرة مركزها H و شعاعها  $\sqrt{r^2 - d^2(\Omega; (P))}$  اذا كان  $d(\Omega; (P)) < r$

\* نقطة اذا كان  $d(\Omega; (P)) = r$  في هذه الحالة نقول (P) مماس للفلكة S عند النقطة H

\* المجموعة الفارغة اذا كان  $d(\Omega; (P)) > r$

### 2- مستوى مماس لفلكة في أحد نقطتها

#### تعريف

لتكن A نقطة من الفلكة  $S(\Omega; r)$  نقول إن المستوى (P) مماس للفلكة S عند النقطة A اذا كان (P) عمودي على  $(\Omega A)$  في A

#### خاصية

لتكن A نقطة من الفلكة  $S(\Omega; r)$

(P) مماس على  $S(\Omega; r)$  في A  $\Leftrightarrow \forall M \in (P) \quad \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

**تمرين** في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر  $S_1$  الفلكة التي معادلتها

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$  و  $S_2$  الفلكة التي مركزها  $\Omega_2$  و شعاعها 2، و (P) المستوى الذي

معادلته  $x - 2y + z + 1 = 0$  و (P') المستوى الذي معادلته  $2x - y - 2z - 1 = 0$ .

1- تأكد أن (P) و  $S_1$  يتقاطعان وفق دائرة محددا عناصرها المميزة.

2- أدرس تقاطع (P') و  $S_2$ .

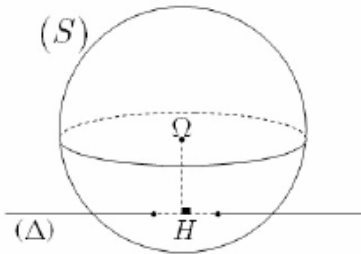
3- حدد معادلة المستوى المماس للفلكة  $S_1$  عند النقطة  $A(1; 1; 3)$

### 3- تقاطع مستقيم و فلكة

في الفضاء E نعتبر الفلكة  $S(\Omega; r)$  و المستقيم  $(\Delta)$  و النقطة H المسقط العمودي لـ  $\Omega$  على المستقيم  $(\Delta)$

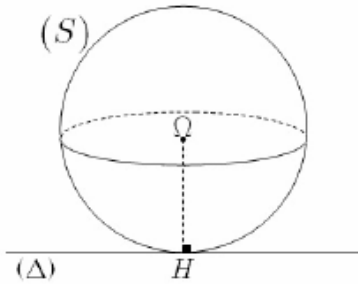
نضع  $d(\Omega; (\Delta)) = H\Omega = d$

$d < r$



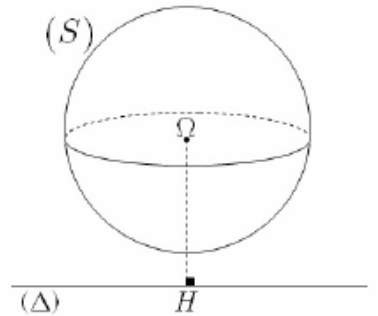
المستقيم  $(\Delta)$  يخترق الفلكة S في نقطتين مختلفتين

$d = r$



المستقيم  $(\Delta)$  الفلكة S يتقاطعان في النقطة H

$d > r$



تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  الفلكة S هو المجموعة الفارغة

#### تمرين

نعتبر S :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 4 = 0$

$$(D_3): \begin{cases} x = \frac{-1}{2} + 2t \\ y = \frac{1}{3} + 3t \\ z = -2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (D_2): \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (D_1): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

حدد تقاطع S مع كل من  $(D_1)$  و  $(D_2)$  و  $(D_3)$

## تمارين

### تمرين 1

- في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
- نعتبر  $A(1;0;1)$  و  $B(0;0;1)$  و  $C(0;-1;1)$  والمستقيم (D) المار من C والموجه بـ  $\vec{u}(-1;2;1)$
- 1- بين أن مجموعة النقط M حيث  $MA=MB=MC$  مستقيم وحدد تمثيلا بارامتريا له
  - 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) العمودي على (D) في C
  - 3- استنتج معادلة ديكارتية للفلكة S المارة من A و B والمماس لـ (D) في C

### تمرين 2

- في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نعتبر  $A(0;3;-5)$  و  $B(0;7;-3)$  و  $C(1;5;-3)$
- 1- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)
  - 2- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A حيث  $\vec{u}(-1;2;1)$  منظمية عليه
  - 3- ليكن (P) المستوى المحدد بالمعادلة  $x+y+z=0$ 
    - أ- تأكد أن (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (D)
    - ب- حدد تمثيلا بارامتريا لـ (D)
  - 4- نعتبر في الفضاء الدائرة (C) التي المحددة بـ
 
$$\begin{cases} x^2+z^2+10z+9=0 \\ y=0 \end{cases}$$
    - أ- حدد معادلة للفلكة S التي تتضمن الدائرة (C) و ينتمي مركزها إلى (ABC)
    - ب- حدد تقاطع S و (AC)

### تمرين 3

- في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر  $A(1;-1;1)$  و  $B(3;1;-1)$  و (P) المستوى ذا
- $$\begin{cases} x=3t \\ x=-2-3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z=2+4t \end{cases}$$
- المعادلة  $2x-3y+2z=0$  (D) المستقيم الممثل بارامتريا بـ
- 1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A و B والعمودي على المستقيم (D)
  - 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q') المار من A و B والعمودي على المستوى (P)
  - 3- أحسب  $d(A;(P))$  و  $d(A;(D))$
  - 4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q') المار من B و الموازي للمستوى (P)

### تمرين 4

- في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة  $3x+2y-z-5=0$
- و (D) المستقيم المعرف بـ
- $$\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$$
- 1- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)
  - 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P') الذي يتضمن (D) و العمودي على (P).

### تمرين 5

- في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة  $x+y+z+1=0$
- و المستوى (Q) ذا المعادلة  $2x-2y-5=0$
- و (S) مجموعة النقط  $M(x;y;z)$  التي تحقق  $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+11=0$
- 1- بين أن (S) فلكة محدد مركزها و شعاعها
  - 2- تأكد أن (P) مماس للفلكة و حدد تقاطعها
  - 3- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من  $A(0;1;2)$  و العمودي على (P)
  - 4- تحقق أن  $(P) \perp (Q)$  و أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D') تقاطع (P) و (Q)

### تمرين 6

- في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط  $A(-2;3;4)$
- المستوى (P) ذا المعادلة  $x+2y-2z+15=0$  (S) مجموعة النقط  $M(x;y;z)$  التي تحقق
- $$\begin{cases} x^2+y^2-2x-8=0 \\ z=0 \end{cases}$$
- $x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z-26=0$  و (C) الدائرة التي معادلتها
- 1- بين أن (S) فلكة محدد عناصرها المميزة
  - 2- بين أن (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة كبرى (C') و حدها
  - 3- حدد معادلتين المستويين المماسين للفلكة (S) و الموازيين لـ (P)
  - 4- أكتب معادلة الفلكة (S') المار من A المتضمن للدائرة (C)

## الجداء المتجهي

### I- توجيه الفضاء

#### 1- معلم موجه في الفضاء

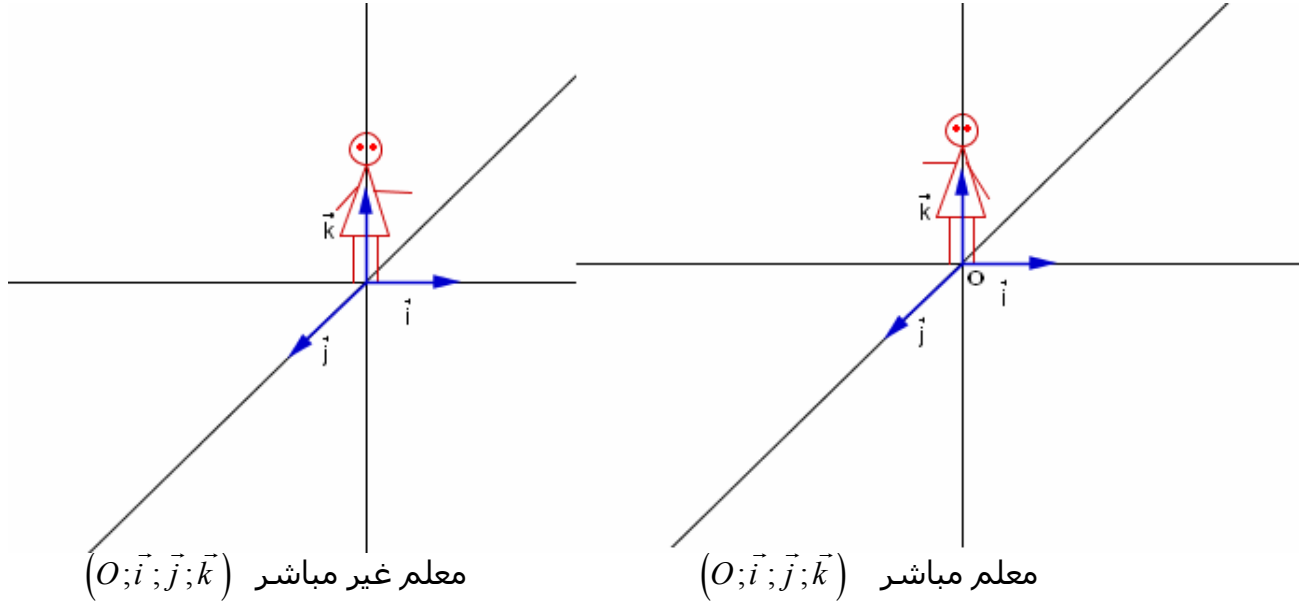
ننسب الفضاء E إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

لتكن I و J و K ثلاث نقط حيث  $\vec{OI} = \vec{i}$   $\vec{OJ} = \vec{j}$   $\vec{OK} = \vec{k}$

« رجل أمبير » للمعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  هو رجل خيالي رأسه في النقطة K قدماه على النقطة O و ينظر

إلى I

, النقطة J إما توجد على يمين « رجل أمبير » أو على يساره .



#### تعريف :

الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  . لتكن I و J و K ثلاث نقط حيث  $\vec{OI} = \vec{i}$   $\vec{OJ} = \vec{j}$   $\vec{OK} = \vec{k}$

نقول إن : \*  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم مباشر إذا وجدت J على يسار « رجل أمبير »

\*  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم غير مباشر إذا وجدت J على يمين « رجل أمبير »

**أمثلة :** \* نعتبر  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم مباشر

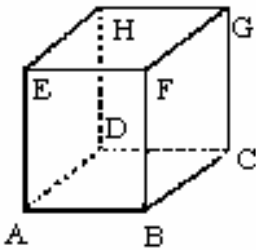
$(O; \vec{j}; \vec{i}; \vec{k})$  معلم غير مباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j}; -\vec{k})$  معلم غير مباشر

$(O; \vec{j}; \vec{k}; \vec{i})$  معلم مباشر

\*\* ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1

معلمان مباشران  $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$  ;  $(B; \vec{BC}; \vec{BA}; \vec{BF})$

معلمان غير مباشرين  $(A; \vec{AD}; \vec{AB}; \vec{AE})$  ,  $(E; \vec{EA}; \vec{EF}; \vec{EH})$



### 2- الأسيرة المباشرة

يمكننا توجيه الفضاء  $V_3$  , إذا وجهنا جميع أساساته

#### تعريف

نقول إن الأساس المتعامد الممنظم  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  مباشر إذا كان  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  م.م.م. مباشر مهما كانت النقطة O

من الفضاء

### 3- توجيه المستوى

ليكن (P) مستوى في الفضاء و  $\vec{k}$  متجهة واحدة و منتظمة على (P) , و O نقطة من المستوى (P)

$(O; \vec{i}; \vec{j})$  م.م.م. للمستوى (P)

لدينا  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ممنظم للفضاء E



يكون المعلم المتعامد الممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  في المستوى (P) معلما مباشرا اذا كان المعلم المتعامد

الممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  مباشرا

- \* يتم توجيه مستوى (P) بتوجيه متجهة منتظمة عليه.
- \* كل المستويات الموازية لـ (P) له نفس توجيه المستوى (P)

## II - الجداء المتجهي

### 1- تعريف

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء  $V_3$  و B و A نقطتين من الفضاء E بحيث  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$   $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  الجداء المتجهي للمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  في هذا الترتيب، هو المتجهة التي لها بـ  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  المعرفة كما يلي :

- \* إذا كانتا  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين فان  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  .
- \* إذا كانتا  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين فان  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  هي المتجهة التي تحقق :
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$  عمودي على كل من  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$
- $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$  أساس مباشر .

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta \quad \text{حيث } \theta \text{ قياس الزاوية } [\widehat{AOB}]$$

**أمثلة \*** نعتبر  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

\* إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين واحدتين و متعامدتين فان  $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$  أساس مباشر .

$$\text{نحسب } \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \text{ علما أن } \theta \in ]0; \pi[ \quad (\vec{u}; \vec{v}) = \theta \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -5 \quad \|\vec{v}\| = 2 \quad \|\vec{u}\| = 5$$

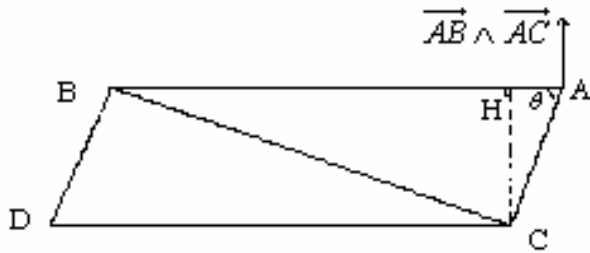
**تمرين**

## 2- خاصيات

### أ- خاصية

إذا كانت B و A و C ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء فان المتجهة  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  منتظمة على المستوى (ABC).

لتكن B و A و C ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء  $\theta$  قياس الزاوية  $[\widehat{CAB}]$  , H المسقط العمودي لـ C على (AB)



$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC \cdot \sin \theta \quad HC = AC \sin \theta$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \times HC$$

### خاصية

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ مساحة المثلث ABC هو نصف}$$

### نتيجة

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ مساحة متوازي الأضلاع ABDC هي}$$

### د- خاصية

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء يكون  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  منعزلا إذا فقط كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين

**البرهان \***  $\Rightarrow$  (بديهية - التعريف)

$\Leftarrow *$

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} &\Leftrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \\ &\Rightarrow \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \quad \vee \quad \|\vec{v}\| = 0 \quad \vee \quad \sin \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont liés}\end{aligned}$$

**ملاحظة**  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow A, B, C$  مستقيمات  
**ج- الجداء المتجهي والعمليات (نقل)**

$$\begin{aligned}\forall (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in V_3^3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad &(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ &(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ &\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \\ &\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}\end{aligned}$$

**تمرين**

معلم متعامد ممنظم مباشر  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

$$\text{أحسب} \quad \vec{i} \wedge 3\vec{j} \quad (\vec{i} + 2\vec{k}) \wedge \vec{j} \quad (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \wedge \vec{k} \quad (2\vec{i} - \vec{j}) \wedge (3\vec{i} + 4\vec{j})$$

**تمرين**

$$\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{d} \quad ; \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{d} \quad \text{لتكن}$$

بين إن  $\vec{a} - \vec{d}$  و  $\vec{b} - \vec{c}$  مسنقيمتان

**3- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في م.م.م مباشر.**

معلم متعامد ممنظم مباشر  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$\begin{aligned}\vec{u}(x; y; z) \quad \vec{v}(x'; y'; z') \\ \vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}\end{aligned}$$

**خاصية**

الفضاء E منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  و  $\vec{u}(x; y; z)$  و  $\vec{v}(x'; y'; z')$  متجهتان من  $V_3$

إحداثيات الجداء المتجهي  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  بالنسبة للأساس  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  هو  $(X; Y; Z)$  حيث

$$X = yz' - zy' \quad Y = zx' - xz' \quad Z = xy' - yx'$$

**ملاحظة** يمكن استعمال الوضعية التالية

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}Z &= xy' - yx' \\ Y &= zx' - xz' \\ X &= yz' - zy'\end{aligned}$$

نعتبر  $\vec{v}(-2; -1; 1)$   $\vec{u}(1; 2; 0)$   $A(1; 2; 1)$   $B(0; -3; 2)$   $C(1; 2; 1)$   
حدد  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  أحسب مساحة المثلث (ABC)

**مثال**

**III - تطبيقات الجداء المتجهي**

## 1- معادلة مستوى معرف ثلاث نقط غير مستقيمة

### خاصية

لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمة من فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر  

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM}$$

**مثال** نعتبر A(1;2;3) و B(1;-1;1) و C(2;1;2) حدد معادلة المستوى (ABC)

### 2- تقاطع مستويين

نعتبر في فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$(P) : ax+by+cz+d=0$$

$$(P') : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

لدينا  $\vec{n}(a;b;c)$  منظمية لـ (P) و  $\vec{n}'(a';b';c')$  منظمية لـ (P')

\* اذا كان (P) و (P') متقاطعين فان المستقيم (D) تقاطع (P) و (P') موجه بـ  $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

\* اذا كان  $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq 0$  فان (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم موجه بـ  $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

### تمرين

حدد تقاطع (P):  $x+2y-2z+3=0$  و (P'):  $4x-4y+2z-5=0$

### 3- مسافة نقطة عن مستقيم

في الفضاء (D) مستقيم مار من A و موجه بـ  $\vec{u}$ , M نقطة من الفضاء و H مسقطها العمودي على (D)

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} \quad \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \quad \text{liés}$$

$$\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\| = HM \cdot \|\vec{u}\| \sin \frac{\pi}{2} = HM \cdot \|\vec{u}\|$$

$$HM = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

### خاصية

في الفضاء (D) مستقيم مار من A و موجه بـ  $\vec{u}$ , M نقطة من الفضاء.

$$d(M; (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{مسافة النقطة M عن المستقيم (D) هي}$$

### تمرين

$$d(A; (D)) = ? \quad (D) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad A(3;2;-1)$$

### تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر A(1;2;1) و B(-2;1;3) و (D) المستقيم الذي

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{معادلته}$$

1- حدد  $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$  ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد  $d(A; (D))$

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)

