

Durée : 4 heures

🌀 Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie 4 septembre 2019 🌀

Exercice 1

6 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être abordées de façon indépendante.

Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n , associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $T_0 = 0,9$.

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n , on a : $T_{n+1} = T_n - 0,1T_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,4. Cette affirmation est-elle conforme au modèle? Pourquoi?
2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = x - 0,1x^2$.
Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = f(T_n)$.
 - a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.
 - b. Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$.
 - c. La suite (T_n) est-elle convergente? Justifier la réponse.
 - d. Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.
Cette affirmation est-elle conforme au modèle? Pourquoi?

Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1^{er} janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.

Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $P(t) = \frac{1000}{0,4 + 3,6e^{-0,5t}}$ où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1^{er} janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $P'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $P'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0 ; +\infty[$ telle que $P(t_0) = 2000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.
4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

Exercice 2**5 points****Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} près.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...

Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

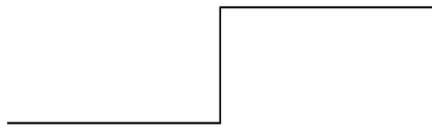
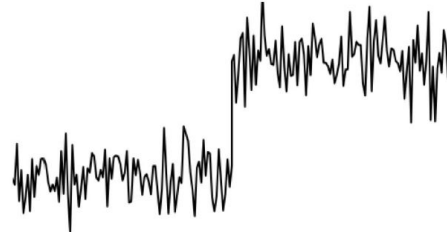
Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet. On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits de l'octet soient mal transmis.
3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable »? Argumenter.

Partie B

Les erreurs de transmission des bits sont liées à la présence de bruits parasites sur le canal de communication comme l'illustre la figure ci-dessous :

Transmission idéale de 0 puis 1**Transmission réelle, bruitée, de 0 puis 1**

On admet que l'information d'un bit reçu, incluant le bruit, peut être modélisée à l'aide d'une variable aléatoire continue qui suit une loi normale dont l'espérance est liée à la valeur du bit envoyé.

On envoie un bit de valeur 1. On admet que l'information reçue d'un bit de valeur 1 peut être modélisée par une variable aléatoire R qui suit la loi normale d'espérance 1 et d'écart-type 0,3.

On considère que le bit reçu n'est pas correctement interprété lorsque la valeur de R est inférieure ou égale à 0,4.

Calculer la probabilité que le bit reçu ne soit pas correctement interprété.

Partie C

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet.

On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.

Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922 ;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les événements suivants :

- Z : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;
- E : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
- D : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
- B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Compléter l'arbre pondéré de l'annexe 1 à rendre avec la copie.
2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?
3. Calculer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 3

4 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. On considère le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Affirmation 1 : Le nombre complexe z^2 est un réel positif.

Affirmation 2 : L'argument du nombre complexe z^{2019} vaut 0 modulo 2π .

Dans ce qui suit, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

2. On considère dans \mathbb{C} l'équation $2z^2 - 3z + 5 = 0$.

Affirmation 3 : Cette équation admet deux solutions dont les images sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

3. À tout point M d'affixe z du plan complexe, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \bar{z}(1 - z).$$

Affirmation 4 : Il existe une infinité de points M confondus avec leur point image M' .

Exercice 4

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Sur la figure donnée en **annexe 2 à rendre avec la copie**, on considère le cube ABCDEFGH de côté 6 cm dans le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'unité étant le cm.

On admet que le point I a pour coordonnées (6; 0; 3) dans ce repère.

On appelle L le milieu du segment [FG].

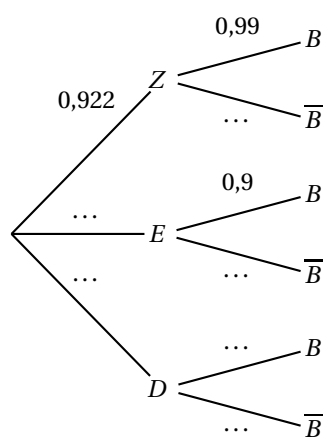
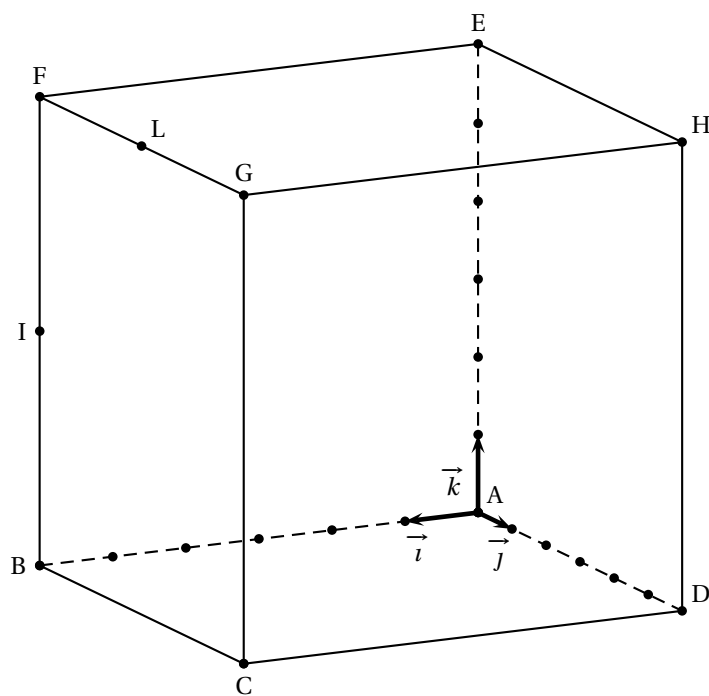
On appelle P le plan défini par les trois points E, I et L.

On rappelle que le volume du tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

1. a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P .
 b. Déterminer une équation cartésienne du plan P .
2. Justifier que le volume du tétraèdre FELI est 9 cm^3 .
3. a. Soit Δ la perpendiculaire au plan P passant par le point F. Justifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = t + 6 \\ y = -2t \\ z = 2t + 6 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

 b. Montrer que l'intersection de la droite Δ et du plan P est le point $K(\frac{16}{3}; \frac{4}{3}; \frac{14}{3})$.
4. Calculer l'aire en cm^2 du triangle ELI.
5. Tracer sur le graphique fourni en **annexe 2 à rendre avec la copie**, la section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle au plan P passant par le point G et en donner la nature précise sans justification.

Annexe 1 de l'exercice 2 à rendre avec la copie

Annexe 2 de l'exercice 4 : Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie

Durée : 4 heures

∞ Corrigé du baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ∞
septembre 2019

Exercice 1

6 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être abordées de façon indépendante.

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

1. On a $T_0 = 0,9$, puis $T_1 = T_0 - 0,1 \times T_0^2 = 0,9 - 0,1 \times 0,81 = 0,9 - 0,081 = 0,819$;
 $T_2 = T_1 - 0,1 \times T_1^2 = 0,751924 \approx 0,752$; $T_3 = T_2 - 0,1 \times T_2^2 \approx 0,695$ et enfin $T_4 = T_3 - 0,1 \times T_3^2 \approx 0,647$.

Donc l'estimation de 0,4 est loin du modèle.

2. a. La fonction polynôme f est dérivable sur $[0; 1]$ et sur cet intervalle :
 $f'(x) = 1 - 2 \times 0,1x = 1 - 0,2x$.
Or $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 0,2x \leq 0,2 \Rightarrow -0,2 \leq -0,2x \leq 0 \Rightarrow 0,8 \leq 1 - 0,2x \leq 1$, ce qui montre que $f'(x) > 0$ sur $[0; 1]$: la fonction f est donc croissante sur $[0; 1]$ de $f(0) = 0$ à $f(1) = 1 - 0,1 = 0,9$.
- b. *Initialisation* : on a vu que $0 < 0,819 < 0,9 < 1$ ou $0 < T_1 < T_0 < 1$: l'encadrement est vrai au rang 0;
Hérédité supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :
 $0 < T_{n+1} < T_n < 1$. par croissance de la fonction f on a :
 $f(0) < f(T_{n+1}) < f(T_n) < f(1)$ ou $0 < T_{n+2} < T_{n+1} < 0,9$.
On a donc $0 < T_{n+2} < T_{n+1} < 1$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang n quelconque il est vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit le naturel n , $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$.
- c. La suite (T_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$.
- d. La calculatrice donne $T_{14} \approx 0,385$: les spécialistes ont donc raison. $T_{20} \approx 0,31$

Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

1. Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction P quotient de fonctions dérivables et de dénominateur strictement positif, est dérivable et sur cet intervalle :

$$P'(t) = -\frac{-0,5 \times 3,6e^{-0,5t} \times 1000}{(0,4 + 3,6e^{-0,5t})^2} = \frac{1800e^{-0,5t}}{(0,4 + 3,6e^{-0,5t})^2}.$$

2. On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} 0,4 + 3,6e^{-0,5t} = 0,4$ et enfin $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1000}{0,4} = 2500$.

$P'(t)$ est un quotient de nombres supérieurs à zéro, on a donc $P'(t) > 0$ sur $[0; +\infty[$.

La fonction P est donc croissante sur $[0; +\infty[$ de $P(0) = \frac{1000}{0,4 + 3,6} = \frac{1000}{4} = 250$ à

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 2500.$$

La fonction P est strictement croissante, continue car dérivable sur $[0; +\infty[$ de 250 à 2500

3. D'après le résultat précédent comme $250 < 2000 < 2500$, il existe un réel unique $t_0 \in [0 ; +\infty[$ tel que $P(t_0) = 2000$.

La calculatrice donne : $P(7) \approx 1965$ et $P(8) \approx 2146$, donc $7 < t_0 < 8$; puis

$P(7,1) \approx 1987$ et $P(7,2) \approx 2007$, donc $7,1 < t_0 < 7,2$.

4. On a trouvé à la question précédente qu'au bout d'un temps t_0 compris entre 7,1 et 7,2 années la population aura atteint les 2 000 individus, donc durant l'année 2026.

Exercice 2

5 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} près.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...

Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.

On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et de probabilité 0,01.
2. On a $P(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0,01^2 \times (1 - 0,01)^{8-2} = 28 \times 0,01^2 \times 0,99^6 \approx 0,00263$ soit 0,002 6 à 10^{-4} près.
3. On a $P(X = 0) = 0,01^0 \times 0,99^8 \approx 0,9227$ et $P(X = 1) = 8 \times 0,01 \times 0,99^7 \approx 0,0746$.
Donc $P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \approx 1 - (0,9227 + 0,0746 + 0,0026) = 1 - 0,9999$ soit 0,000 1 ce qui est effectivement négligeable.

Partie B

On sait que $P(R \leq 0,4) = P(R \leq 1) - P(0,4 \leq R \leq 1) = 0,5 - P(0,4 \leq R \leq 1)$.

La calculatrice donne $P(R \leq 0,4) \approx 0,228$ (un peu plus de 2 %).

Partie C

1. Voir à la fin.
2. La probabilité demandée est $P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0,075 \times 0,9 = 0,0675$.
3. D'après la loi des probabilités totales :
 $P(B) = P(Z \cap B) + P(E \cap B) + P(D \cap B) = 0,922 \times 0,99 + 0,074 \times 0,9 + 0,003 \times 0,99 = 0,98325$ soit 0,983 3 à 10^{-4} près.

Exercice 3**4 points****Commun à tous les candidats**

1. **Affirmation 1** : $z^2 = (1 + i\sqrt{3})^2 = 1 - 3 + 2i\sqrt{3} = -2 + 2i\sqrt{3}$ qui n'est pas un réel.

Affirmation 2 : On a $|z|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$, d'où $|z| = 2$. On peut en factorisant 2 écrire :

$$z = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$\text{Il suit que : } z^{2019} = \left[2e^{i\frac{\pi}{3}} \right]^{2019} = 2^{2019} e^{i\frac{2019\pi}{3}} = e^{673i\pi}.$$

Or $673\pi = 672\pi + \pi$ donc un argument de z^{2019} est π à 2π près.

L'affirmation est fausse.

2. On considère dans \mathbb{C} l'équation $2z^2 - 3z + 5 = 0$.

Affirmation 3 : On a $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31$: cette équation a deux solutions complexes :

$z_1 - \frac{3 + i\sqrt{39}}{4}$ et $z_2 - \frac{3 - i\sqrt{39}}{4}$: les images de ces deux complexes sont symétriques autour de l'axe des abscisses. L'affirmation est fausse.

3.

$$z' = \overline{z}(1 - z).$$

Affirmation 4 : $M = M' \iff z' = z = \overline{z}(1 - z)$.

Avec $z = x + iy$, d'où $\overline{z} = x - iy$, on obtient :

$$z' = z \iff x + iy = (x - iy)(1 - x - iy) \iff x + iy = x(1 - x) - y^2 + i[-xy + y(x - 1)].$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient respectivement :

$$\begin{cases} x &= x(1 - x) - y^2 \\ y &= -xy + y(x - 1) \end{cases}$$

La première équation donne $x^2 + y^2 = 0$, équation qui n'est vérifiée que par le couple $(0; 0)$.

La deuxième équation donne $y = -xy + xy - y$ soit : $2y = 0$ d'où $y = 0$.

Les deux conditions devant être réalisées, le seul point confondu avec son image est l'origine O. L'affirmation est fausse.

Exercice 4**5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. a. On a $\overrightarrow{EI} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EL} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et on a :

$$\overrightarrow{EI} \cdot \vec{n} = 6 - 6 + 0 = 0 \text{ et } \overrightarrow{EL} \cdot \vec{n} = 6 - 6 + 0 = 0.$$

Le vecteur \vec{n} normal à deux vecteurs non colinéaires du plan P est normal à ce plan.

b. D'après le résultat précédent :

$$M(x; y; z) \in P \iff 1x - 2y + 2z = d, \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Or } E(0; 0; 6) \in (P) \iff 12 = d.$$

Conclusion : une équation cartésienne du plan P est :

$$M(x; y; z) \in P \iff x - 2y - 2z = 12.$$

2. le triangle EFI est clairement rectangle en F, avec EF = 6 et FI = 3.

L'aire du triangle EFI est donc égale à : $\frac{6 \times 3}{2} = 9 \text{ cm}^2$.

Comme FL = 3, le volume du tétraèdre FELI est donc égale à :

$$\frac{9 \times 3}{3} = 9 \text{ cm}^3.$$

3. a. On a vu que le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan P ; c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ qui contient F. Tout point $M(x; y; z) \in \Delta \iff \overrightarrow{FM} = t \vec{n}$ qui se traduit par le système :

$$\begin{cases} x-6 = 1t \\ y-0 = -2t \\ z-6 = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t+6 \\ y = -2t \\ z = 2t+6 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

- b. Un point $M(x; y; z)$ est commun à la droite Δ et au plan P si et seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x = t+6 \\ y = -2t \\ z = 2t+6 \\ x-2y-2z = 12 \end{cases}.$$

En remplaçant s , y et z dans la dernière équation :

$$t+6-2(-2t)+2(2t+6)=-12 \iff t+6+4t+4t+12=12 \iff 9t=-6 \iff t=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}.$$

$$\text{D'où } x = t+6 = -\frac{2}{3}+6 = \frac{-2+18}{3} = \frac{16}{3}; y = -2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}; z = 6+2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}.$$

$$\text{Donc } K\left(\frac{16}{3}; \frac{4}{3}; \frac{14}{3}\right).$$

4. Le tétraèdre FELI vu à la question 2. de base le triangle ELI a pour hauteur [FK].

$$\text{Donc } V(\text{FELI}) = \frac{\mathcal{A}(\text{ELI}) \times \text{FK}}{3}.$$

$$\text{Or } V(\text{FELI}) = 9 \text{ cm}^3 \text{ et } \text{FK}^2 = \left(\frac{16}{3}-6\right)^2 + \left(\frac{4}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{14}{3}-6\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} = \frac{36}{9} = 4, \text{ d'où } \text{FK} = 2.$$

$$\text{On a donc } 9 = \frac{\mathcal{A}(\text{ELI}) \times 2}{3}, \text{ d'où } \mathcal{A}(\text{ELI}) = \frac{27}{2} = 13,5 \text{ cm}^2.$$

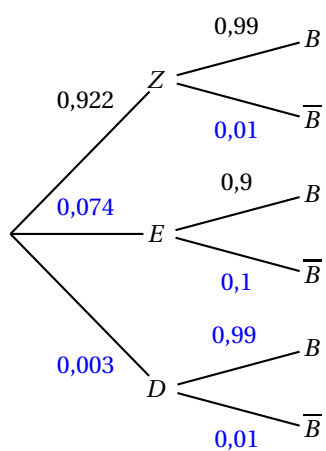
5. I et L étant les milieux respectifs de [FB] et [FG] la droite (BG) est parallèle à la droite (IL).

M étant le milieu de [EH] la droite (GM) est parallèle à la droite (LE).

N étant le milieu de [EA] la droite (MN) est parallèle à la droite (LI).

La section est donc le quadrilatère (BGMN) et (MN) étant parallèle à (BG) ce quadrilatère est un trapèze.

Annexe 1 de l'exercice 2 à rendre avec la copie

Annexe 2 de l'exercice 4 : Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie