1.4 Exercices

NB: Le tableau statistique contient: modalités, effectifs, fréquences, pourcentages, effectifs cumulés, fréquences cumulées et pourcentages cumulés.

Exercice 1:
On donne les couleurs de $n = 15$ plantes.

V V R N R R V R R R J N N N N

1. De quel type est la variable couleur?
2. Construire le tableau statistique et en déduire le mode.
3. Construire le diagramme en secteurs.

Exercice 2:
Trente éprouvettes d'acier spécial sont soumises à des essais de résistance. Pour chacune, on note le nombre de chocs nécessaires pour obtenir la rupture. Les résultats obtenus sont les suivants :

2	2	3	1	2	1	4	2	3	2
3	2	3	3	4	1	1	4	2	3
2	3	2	2	3	4	3	2	3	2

1. De quel type est cette variable?
2. Construire le tableau statistique et en déduire le mode.
3. Construire le diagramme en bâtonnets des effectifs.
4. Déterminer la médiane, la moyenne, la variance et l'écart type de cette variable.
5. Déterminer la fonction de répartition et tracer sa courbe.

Exercice 3:
On pèse les $n = 50$ élèves d'une classe et nous obtenons les résultats résumés dans le tableau suivant:

43	43	43	47	48	48	48	48	49	49
49	50	50	51	51	52	53	53	53	54
54	56	56	56	57	59	59	59	62	62
63	63	65	65	67	67	68	70	70	70
72	72	73	77	77	81	83	86	92	93

1. De quel type est la variable poids?
2. Construire le tableau statistique en adoptant quatres classes seulement.
4. Déterminer la fonction de répartition et tracer sa courbe.
5. Déterminer la médiane directement et par interpolation linéaire.
6. Déterminer la classe modale et les centres des classes.
7. En déduire la moyenne, la variance et l'écart type de la variable poids.

Exercice 4:
Considérons un échantillon de $n = 10$ fonctionnaires (ayant entre 40 et 50 ans) d'un ministère. Soit X le nombre d'années de service et Y le nombre de jours d'absence pour raison de maladie (au cours de l'année précédente) déterminé pour chaque personne appartenant à cet échantillon.

x_i	2	14	16	8	13	20	24	7	5	11
y_i	3	13	17	12	10	8	20	7	2	8

1. Déterminer les moyennes de X et Y et la covariance entre X et Y.
2. Déterminer le coefficient de corrélation entre les variables X et Y. Donner une interprétation.
3. Déterminer la droite de régression linéaire Y en fonction de X.
4. Tracer le nuage de points (X, Y).
5. Tracer la droite de régression linéaire de Y en X.
6. vérifier que la droite de régression passe par le point $(\bar{x}, \bar{y})$.
7. Établir, sur la base de ce modèle, le nombre de jours d'absence pour un fonctionnaire ayant 22 ans de service.
8. Déterminer la variance résiduelle et le coefficient de détermination. Interpréter.

Exercice 5:
On étudie un échantillon de taille $n = 100$ sur lequel ont été mesurés deux caractères X et Y. On a observé les résultats suivants:

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 800 \qquad \sum_{i=1}^{100} y_i = 1200 \qquad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 7200$$

$$\sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 16000 \qquad \sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 10200$$

1. Déterminer les moyennes, les variances et la covariance de X et Y.
2. En déduire le coefficient de corrélation entre X et Y. Interpréter.
3. Déterminer la droite de régression linéaire de Y en X.
4. Déterminer la variance résiduelle et le coefficient de détermination. Interpréter.
5. Déterminer la droite de régression linéaire de X en Y.

2.4 Exercices

Exercice 1:
On tire simultanément deux boules dans une urne qui contient: trois boules vertes, deux boules noires et une boule rouge. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules vertes tirées.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Calculer $P(X \leq 1)$ et $P(X > 1)$.

Exercice 2:
On lance une pièce de monnaie équilibré trois fois successive. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de faces obtenues.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Calculer $P(X \leq 2)$ et $P(X > 2)$.

Exercice 3:
On lance deux trièdres équilibrés numérotés $0,\ 1,\ 2,\ 3$. Soit X la variable aléatoire qui correspond à la somme des deux chiffres obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 4:
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Calculer $P(X \leq 1)$ et $P(X > 1)$.

Exercice 5:
Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer:

1. $P(Z \leq 1.23)$.
2. $P(Z \leq -1.23)$.
3. $P(Z > 1.23)$.
4. $P(|Z| < 1.23)$.
5. $P(Z \in [-0.88; 0.36])$.
6. $P(Z \in [0.45; 1.23])$.

Exercice 6:
Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer les valeurs de z telles que:

1. $P(Z \leq z) = 0.975$.
2. $P(Z \leq -z) = 0.3438$.
3. $P(Z \leq z) = 0.9332$.
4. $P(Z > z) = 0.0125$.
5. $P(|Z| < z) = 0.3438$.
6. $P(Z \in [z; 2.01]) = 0.3438$.

Exercice 7:
Soit une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(53, \sigma^2 = 100)$ représentant le résultat d'un examen pour un étudiant d'une section. Déterminer la probabilité pour que le résultat soit compris entre 33.4 et 72.6.

Exercice 8:
Soit une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(50, \sigma^2 = 100)$. Déterminer z tel que $P(X \leq z) = 0.67$.

Exercice 9:
Sur une route principale où la vitesse est limitée à 80 km/h, un radar a mesuré la vitesse de toutes les automobiles pendant une journée. En supposant que les vitesses recueillies soient distribuées normalement avec une moyenne de 72 km/h et un écart-type de 8 km/h, quelle est approximativement la proportion d'automobiles ayant commis un excès de vitesse?

Exercice 10:
On suppose que la glycémie est distribuée normalement dans la population, avec une moyenne de $1g/l$ et un écart type $0.03g/l$. On mesure la glycémie chez un individu. Calculer la probabilité pour que sa glycémie soit:

1. inférieure à 1.06.
2. supérieure 0.9985.

3.3 Exercices

Exercice 1 (Échantillonnage):
Pour estimer l'âge moyen d'une population de 4000 employés, un échantillon aléatoire de 40 employés est sélectionné. Quelle est la probabilité que l'âge moyen des employés de l'échantillon soit compris entre l'âge moyen de la population ± 2 si l'on sait que l'écart type de la population est de 8,2 ans?

Exercice 2 (Échantillonnage):
Une élection a eu lieu et un candidat a eu une proportion 40% des voix. On prélève un échantillon de 100 bulletins de vote. Quelle est la probabilité que, dans l'échantillon, le candidat ait entre 35% et 45% des voix?

Exercice 3 (Estimation):
Dans le cadre d'une étude sur la violence verbale au travail, on a interrogé au hasard 500 salariés de différents secteurs. 145 d'entre eux déclarent avoir déjà subi une violence verbale au travail.

1) Identifier la population, la variable et son type.
2) Donner une estimation ponctuelle de la proportion de salariés ayant déjà subi une violence verbale.
3) Donner une estimation de cette proportion par un intervalle de confiance à 90% et 99%.
4) Si avec les mêmes données on calculait un intervalle de confiance à 99%, serait-il plus grand ou plus petit que celui trouvé à la question précédente?

Exercice 4 (Estimation):
On admet que le taux de cholestérol chez une femme suit une loi normale. Sur un échantillon de 10 femmes, on a obtenu les taux de cholestérol (en g/l) suivants:

3	1.8	2.1	2.7	1.4	1.9	2.2	2.5	1.7	2

1)- Déterminer une estimation ponctuelle de la moyenne et de la variance du taux.
2)- Déterminer un intervalle de confiance pour la moyenne du taux au seuil 5%.

Exercice 5 (Estimation):
Une machine produit des pièces de type X. La masse, exprimée en (g), d'une pièce tiré au hasard dans la production, est distribuée selon une loi normale. On tire un échantillon de 17 pièces de masses suivantes:

250 254 254 253 256 250 257 251
253 255 250 255 252 261 252 251 255

1) Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et la variance de production.

2) Déterminer une estimation par intervalle de confiance à 99% de la masse moyenne.
3) On suppose maintenant que la variance de la population est connue $\sigma^2 = 8.51$. Préciser la loi de la moyenne échantillonnale et déterminer la taille minimale donner a un échantillon pour obtenir un intervalle de confiance pour la moyenne au niveau 95% d'amplitude inférieure à 2. Conclure.

Exercice 6 (Estimation):
Dans la fabrication de comprimés effervescents, il est prévu que chaque comprimé doit contenir 1625 mg de bicarbonate de sodium. Afin de contrôler la fabrication de ces médicaments, on a prélevé un échantillon de 150 comprimés et on a mesuré la quantité de bicarbonate de sodium pour chacun d'eux:

Classes	$[1610; 1615[$	$[1615; 1620[$	$[1620; 1625[$	$[1625; 1630[$	$[1630; 1635[$
Effectifs	7	8	42	75	18

1) En convenant que les valeurs mesurés sont regroupées au centre de chaque classe, donner une estimation ponctuelle de la moyenne et la variance de la quantité de bicarbonate de sodium dans la population formée de l'ensemble de tous les comprimés fabriqués et supposée très grande.
2) Déterminer une estimation par intervalle de confiance à 95% de la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population.

Exercice 7 (Estimation):
On a mesuré le poids de raisin produit par m^2 sur $10m^2$ pris au hasard dans une vigne. On suppose que le poids de raisin produits par une souche de cette vigne suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a obtenu les résultats suivants exprimés en (Kg):

24	34	36	41	43	47	54	59	65	69

1) Déterminer une estimation ponctuelle de la moyenne théorique μ et de la variance théorique σ^2.
2) Déterminer une estimation par intervalle de confiance à 95% de μ.
3) Déterminer une estimation par intervalle de confiance à 95% de σ^2.

4.7 Exercices

Exercice 1:
On admet que le taux de cholestérol chez une femme suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sur un échantillon de 10 femmes, on a obtenu les résultats suivants:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 21.3 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 47.49$$

1. Déterminer une estimation ponctuelle de la moyenne et de la variance du taux.
2. Déterminer un intervalle de confiance pour la moyenne du taux au seuil 5%.
3. Tester au seuil 5% l'hypothèse que la moyenne de la population est 2.

Exercice 2:
Dans une usine du secteur de l'agroalimentaire, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et par une file d'approvisionnement en bouteilles vides. Pour contrôler le bon fonctionnement de la machine. Pour une production d'une heure, on suppose que la variable aléatoire X qui à toute bouteille, prise au hasard dans cette production, associe le volume d'eau (en litres) qu'elle contient, est une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ inconnus. On a prélevé un échantillon de 100 bouteilles, et on a obtenu un volume d'eau moyen: 1,495 l et un écart-type corrigé de 0,01.
1. Déterminer un intervalle de confiance pour la moyenne au seuil 1%.
2. Tester au seuil 1% si la moyenne vaut 1.5 l.

Exercice 3:
On sait qu'une maladie atteint 10% des individus d'une population donnée. Un chercheur a expérimenté un traitement sur un échantillon de n individus : il a alors recensé 5% de malades.
1. Déterminer la valeur maximale de n qui permette au chercheur de conclure à l'efficacité du traitement au risque de 5%
2. Déterminer un intervalle de confiance pour la proportion au seuil 5%.

Exercice 4:
Le volume d'une pipette d'un type donné suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Le fabriquant annonce un écart-type $\sigma_0 = 0.2\mu l$. Pour le vérifier, on pipette 20 fois un liquide, on observe une moyenne de $10\mu l$ et un écart-type de $0.4\mu l$.
1. Déterminer un intervalle de confiance pour la variance au seuil 5%.
2. Tester au seuil 5% si l'écart type vaut 0.2.

Exercice 5:
Une étude a été réalisée sur le cancer de la gorge. Pour cela, une population de 1000 personnes a été interrogée. les résultats obtenus sont donnés dans le tableau de contingences suivant:

	Atteint du cancer de la gorge	Non atteint du cancer de la gorge
Fumeur	344	258
Non-fumeur	160	238

1. Doit-on rejeter au risque 5% l'hypothèse d'indépendance des deux caractères: X=(être fumeur) et Y=(être atteint du cancer de la gorge) .
2. Vérifier la validité du test.

Exercice 6:
Nous avons réalisé 10 dosages. On a obtenu les résultats suivants:

60 80 55 45 60 65 65 60 70 40

1. Utiliser le test de Shapiro et Wilk pour tester la normalité de ces données.

Exercice 7:
On compare les effets d'un même traitement dans deux hôpitaux différents. Dans le premier hôpital, 70 des 100 malades traités montrent des signes de guérison. Dans le deuxième hôpital, c'est le cas pour 100 des 150 malades traités.
1. Quelle conclusion peut-on en tirer au risque de 5%? (comparer les proportions).

Exercice 8:
Sur deux groupes de même taille: 10 malades, on expérimente les effets d'un traitement destiné à diminuer la pression artérielle. On observe les résultats suivants (valeurs de la tension artérielle systolique en cm Hg). On supposera les populations gaussiennes.

Groupe 1	15	18	17	20	21	18	17	15	19	16
Groupe 2	12	16	17	18	17	15	18	14	16	18

1. Le traitement a-t-il une action significative, au risque de 5%? (comparer les variances puis comparer les moyennes).

Exercice 9 (ANOVA):
Pour définir l'impact de la nature du sol sur la croissance d'une plante X, un botaniste a mesuré la hauteur des plantes pour 4 types de sol. Pour chaque type de sol, il disposait de 3 réplicats.
1. La croissance de plante X est-elle dépendante de la nature du sol?

Types de sol			
(1)	(2)	(3)	(4)
15	25	17	10
9	21	23	13
4	19	20	16

4.8 Exercices de révisions

Exercice 1 (Variable continue et construction des classes):
On a relevé les salaires annuels en (DH) de $n = 30$ personnes:

1860	2010	2110	2380	2600	2770	2770	2810	2920	2950
3180	3250	3250	3280	3360	4310	4320	4960	5430	5670
5710	5850	6230	6250	6960	7470	7880	8710	9440	9590

1. De quel type est la variable salaire? Déterminer sa médiane. Interpréter.
2. Construire le tableau statistique en adoptant des classes de même amplitude selon la règle de Sturge.
3. Construire l'histogramme des fréquences.
4. Déterminer la classe modale et les centres des classes.
5. En déduire la moyenne, la variance et l'écart type de la variable salaire.

Exercice 2 (Régression linéaire):
On considère la série double statistique suivante:

x_i	2	3	5	1	4
y_i	4	9	11	3	8

1. De quel type sont les variables X et Y.
2. Déterminer les médianes, les moyennes et les variances de X et Y.
3. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation entre X et Y. Donner une interprétation.
4. Déterminer la droite de régression linéaire de Y en X.
5. Tracer le nuage de points et la droite de régression linéaire de Y en X.
6. Vérifier que la droite de régression passe par le point $(\bar{x}, \bar{y})$.
7. Établir, sur la base de ce modèle, la valeur y^* correspond à la valeur $x^* = 3,5$.
8. Déterminer la variance résiduelle et le coefficient de détermination. Interpréter.

Exercice 3 (Loi de probabilité discrète):
On lance deux trièdres équilibrés numérotés: 1; 2; 3; 4. On note X la variable aléatoire qui donne le plus grand des deux numéros obtenus.

1. Donner la loi de X. En déduire: $P(X \leq 2)$, $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 4 (Loi de probabilité continue):
Soit X une variable aléatoire continue qui suit la loi de Pareto de densité: $f(x) = \frac{1_{(x>1)}}{x^2}$.

1. Vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ puis calculer $E(X)$.

Exercice 5 (Comparaisons des proportions):
Pour traiter un certain type de tumeur, on a utilisé deux schémas thérapeutiques:
- Sur 40 malades traités avec le schéma A, on a observé la mort de 6 malades,
- Sur 60 malades traités avec le schéma B, on a observé la mort de 15 malades.

1. Donner une estimation ponctuelle des proportions dans les deux populations.
2. Pour la population 1, donner une estimation par intervalle de confiance de la proportion au risque 1%.
3. Tester au risque 1% pour la population 2 si la proportion vaut 20%.
4. Comparer au risque 5% les proportions des deux populations. Peut-on dire que les schémas A et B diffèrent significativement au risque 5% ?

Exercice 6 (Comparaisons des moyennes):
Sur deux groupes de même taille: 9 malades, on expérimente les effets d'un nouveau médicament. On observe les résultats suivants:

Groupe 1	15	18	17	20	21	18	17	15	19
Groupe 2	12	16	17	18	17	15	18	14	16

1. Donner une estimation ponctuelle des moyennes et variances dans les deux populations.
2. Pour la population 1, donner une estimation par intervalle de confiance de la moyenne au risque 5%.
3. Pour la population 1, donner une estimation par intervalle de confiance de la variance au risque 5%.
4. Tester au risque 5% pour la population 2 si la moyenne vaut 16.
5. Tester au risque 5% pour la population 2 si la variance vaut 4.
6. Comparer au risque 5% les variances des deux populations.
7. Comparer au risque 5% les moyennes des deux populations.

Exercice 7 (ANOVA et test de Shapiro et Wilk):
Afin de tester l'hypothèse que la consommation de caféine facilite l'apprentissage, trois groupes d'étudiants se préparent à un examen: le groupe 1 boit une tasse, le groupe 2 boit 2 tasses et le groupe 3 boit 3 tasses de café. Voici leurs scores à l'examen:

Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
50	48	57
42	47	59
53	65	48

1. Utiliser le test de Shapiro et Wilk pour tester la normalité des neuf données.
2. Construire le tableau d'ANOVA et conclure au risque 5%.

Exercice 8 (Test d'indépendance de Khi-deux):
Une étude a été réalisée sur le cancer de la gorge. Pour cela, une population de 1000 personnes a été interrogée. les résultats obtenus sont donnés dans le tableau de contingences suivant:

	Atteint du cancer de la gorge	Non atteint du cancer de la gorge
Fumeur	344	258
Non-fumeur	160	238

1. Doit-on rejeter au risque 5% l'hypothèse d'indépendance des deux caractères: X=(être fumeur) et Y=(être atteint du cancer de la gorge) .
2. Vérifier la validité du test.

4.9 Examen (session normale 2016-2017)

Exercice 1 (2 pts=1+1):
Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu = 170, \sigma^2 = 64)$.

1. Calculer $P(160 < X < 176)$.
2. Déterminer la valeur de z tel que $P(170 - z < X < 170 + z) = 0,668$.

Exercice 2 (9 pts=2+2+1+1+1+2):
On considère la série double statistique suivante:

y_i	5	1	3	2	4
x_i	11	3	9	4	8

1. Déterminer les médianes, les moyennes et les variances de X et Y.
2. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation entre X et Y. Donner une interprétation.
3. Déterminer la droite de régression linéaire de Y en X.
4. Tracer le nuage de points et la droite de régression linéaire de Y en X.
5. Établir, sur la base de ce modèle, la valeur y^* correspond à la valeur $x^* = 4,5$.
6. Déterminer la variance résiduelle et le coefficient de détermination. Donner une interprétation.

Exercice 3 (5 pts=1+1+2+1):
Dans une université, on veut comparer les proportions de réussite dans la filière STU S3 sur deux années différentes:

- Pour l'année 2014, on note 80 succès pour 120 interrogés,
- Pour l'année 2015, on note 70 succès pour 110 interrogés.

1. Pour l'année 2014, estimer par intervalle de confiance la proportion au risque 5%.
2. Pour l'année 2015, tester au risque 5% si la proportion vaut 60%.
3. Comparer au risque 5% les proportions des deux années. Peut-on dire que les deux années diffèrent significativement au risque 5% ?
4. Vérifier les conditions de validité de ce dernier test.

Exercice 4 (4 pts=2+2):
Le tableau suivant présente la production laitière en litres par jours de trois races de vaches:

Race (1)	Race (2)	Race (3)
147	153	142
150	148	165
148	159	157

1. Tester au risque 5% la normalité des données.
2. Construire le tableau d'ANOVA et conclure au risque 5%.

Bon courage

Loi Normale N(0,1) : P(Z<z)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7

Loi Fisher Snédécor à (v_1, v_2) ddl

$P(F \geqslant f_\alpha) = \alpha = 0{,}05.$

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54

Table de Shapiro et Wilk

n	Risque 5 %	Risque 1 %
	$W_{0,05}$	$W_{0,01}$
5	0,762	0,686
6	0,788	0,713
7	0,803	0,730
8	0,818	0,749
9	0,829	0,764
10	0,842	0,781
11	0,850	0,792
12	0,859	0,805

Tables des valeurs des a_j

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J									
1	0.7071	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739
2		0.0000	0.1677	0.2413	0.2806	0.3031	0.3164	0.3244	0.3291
3				0.0000	0.0875	0.1401	0.1743	0.1976	0.2141
4						0.0000	0.0561	0.0947	0.1224
5								0.0000	0.0399

4.10 Examen (session de rattrapage 2016-2017)

Exercice 1 (2 pts=1+1):
Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité: $f(x) = \frac{1_{(x>1)}}{x^2}$.

1. Vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
2. Calculer l'espérance $E(X)$.

Exercice 2 (9 pts=1+2+2+1+1+1+1):
On considère la série double statistique suivante:

x_i	16	8	7	5	11	2	14	13	20	24
y_i	17	12	7	2	8	3	13	10	8	20

1. Déterminer les médianes de X et Y. Donner une interprétation.
2. Déterminer les moyennes et les variances de X et Y.
3. Déterminer la covariance et le coefficient de corrélation entre X et Y. Donner une interprétation.
4. Déterminer la droite de régression linéaire de Y en X.
5. Tracer le nuage de points et la droite de régression linéaire de Y en X.
6. Établir, sur la base de ce modèle, la valeur y^* correspond à la valeur $x^* = 10$.
7. Déterminer la variance résiduelle et le coefficient de détermination. Donner une interprétation.

Exercice 3 (9 pts=1+1+1+1+1+2+2):
Sur deux groupes de deux types de produits, on test un nouveau processus. On observe les résultats suivants:

Produit A	17	18	17	15	14	16	2	12	16	18
Produit B	17	15	19	1	15	18	21	18	17	20

1. Donner une estimation ponctuelle des moyennes et variances dans les deux groupes.
2. Pour le groupe B, estimer par intervalle de confiance la moyenne au risque 5 %.
3. Pour le groupe A, estimer par intervalle de confiance la variance au risque 5 %.
4. Pour le groupe B, tester au risque 5 % si la moyenne vaut 16.
5. Pour le groupe A, tester au risque 5 % si la variance vaut 20.
6. Comparer au risque 5 % les variances des deux groupes.
7. Pour le groupe A, tester au risque 5 % la normalité des données.

Bon courage

Loi Student : P(T>t) = alpha

Degrés de liberté	alpha : Aire dans la queue supérieure de la distribution					
	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250

Loi Khi-deux à v ddl : $P(Y^2>x)$

v \ α	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103
3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449
4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767
5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863
6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119
7	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753
8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902
9	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660
10	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093

Loi Fisher Snédécor à (v_1, v_2) ddl

$P(F \geqslant f_\alpha) = \alpha = 0,025$

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1 001	1 018
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,67
9	7,21	5.71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,08

Table de Shapiro et Wilk

n	Risque 5 %	Risque 1 %
	$W_{0,05}$	$W_{0,01}$
5	0,762	0,686
6	0,788	0,713
7	0,803	0,730
8	0,818	0,749
9	0,829	0,764
10	0,842	0,781
11	0,850	0,792
12	0,859	0,805

Tables des valeurs des a_i

n / J	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.7071	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739
2		0.0000	0.1677	0.2413	0.2806	0.3031	0.3164	0.3244	0.3291
3				0.0000	0.0875	0.1401	0.1743	0.1976	0.2141
4						0.0000	0.0561	0.0947	0.1224
5								0.0000	0.0399

4.11 Examen (session normale 2017-2018)

Exercice 1 (3 pts=1+2)

1. Nous supposons que l'âge auquel un enfant commence à marcher est une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 13 mois et une variance 2,25 mois. Quelle est la probabilité qu'un enfant commence à marcher entre 11 et 15 mois ?
2. Le score obtenu sur la qualité d'un produit a pour moyenne 84 et un écart-type de 35. Quelle est la probabilité d'observer sur un échantillon de taille 75 un score moyen supérieure à 90 ?

Exercice 2 (7 pts=2+2+1+2)
Dans la série statistique suivante, X représente le nombre de jours d'exposition au soleil d'une feuille et Y le nombre de stomates aérifères au millimètre carré :

X	22	26	2	4	12	18	28	30	7	10
Y	31	36	4	10	23	28	48	53	25	20

1. Déterminer l'équation de la droite de regression linéaire de Y en X.
2. Calculer les coefficients de corrélation et de détermination. Commenter les résultats.
3. Quel nombre de stomates peut-on prévoir après 20 jours d'exposition au soleil ?
4. Tracer le nuage de points et la droite de régression linéaire de Y en X.

Exercice 3 (4 pts=1+1+1+1)
Pour traiter un certain type de tumeur, on a utilisé deux schémas thérapeutiques:
- Sur 40 malades traités avec le schéma A, on a observé une mortalité de 6 malades.
- Sur 60 malades traités avec le schéma B, on a observé une mortalité de 15 malades.

1. Pour le schéma A, estimer par intervalle de confiance la proportion au risque 5%.
2. Pour le schéma B, tester au risque 5% si la proportion vaut 20%.
3. Comparer au risque 5% les proportions pour les deux schémas.
4. Vérifier la validité du test de la question (3).

Exercice 4 (6 pts=2+1+3)
Pour mesurer l'influence de nourriture sur la croissance du poids des bébés, on a mesuré le poids des bébés pour quatres types de nourriture.

Type (1)	Type (2)	Type (3)	Type (4)
4	25	17	15
19	21	10	23
20	9	13	16

1. Tester au risque 5 % la normalité des données.
2. Préciser les deux hypothèses ($\mathcal{H}_0$) et ($\mathcal{H}_1$) pour l'ANOVA.
3. Construire le tableau d'ANOVA et conclure au risque 5%.

Bon courage

Loi Normale N(0,1) : P(Z<z)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Loi Fisher Snédécor à (v_1, v_2) ddl

$P(F \geqslant f_\alpha) = \alpha = 0{,}05.$

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54

Table de Shapiro et Wilk

n	Risque 5 %	Risque 1 %
	$W_{0,05}$	$W_{0,01}$
5	0,762	0,686
6	0,788	0,713
7	0,803	0,730
8	0,818	0,749
9	0,829	0,764
10	0,842	0,781
11	0,850	0,792
12	0,859	0,805

n / J	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.7071	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739	0.5601	0.5475
2		0.0000	0.1677	0.2413	0.2806	0.3031	0.3164	0.3244	0.3291	0.3315	0.3325
3				0.0000	0.0875	0.1401	0.1743	0.1976	0.2141	0.2260	0.2347
4						0.0000	0.0561	0.0947	0.1224	0.1429	0.1586
5								0.0000	0.0399	0.0695	0.0922
6											0.0303

4.12 Examen (session de rattrapage 2017-2018)

Exercice 1 (8 pts=3+1+2+2)
Un échantillon de 48 poissons de la même espèce à fourni les poids suivants (en g):

60	82	92	97	101	104	109	118	131	155	69	82
93	97	101	104	110	120	133	165	70	85	93	99
101	105	110	121	138	166	74	85	93	99	102	106
110	125	140	128	79	87	94	99	102	107	114	180

1. Construire le tableau statistique en adoptant quatres classes.
2. Tracer la fonction de répartition.
3. Déterminer la médiane par interpolation linéaire.
4. Utiliser les quatres classes pour calculer la moyenne, la variance et l'écart type.

Exercice 2 (4 pts=3+1)
Le tableau ci-dessus résume la présence ou l'absence d'une infection bactérienne en fonction de l'usage ou non d'une antibiothérapie ou d'un placebo:

	Antibio	Placebo
Absence	74	27
Présence	10	29

1. Doit-on rejeter au risque 5% l'hypothèse d'indépendance des deux caractères.
2. Vérifier la validité du test.

Exercice 3 (8 pts=1+1+1+1+2+2)
On a mesuré, dans deux classes différentes, après une course de 400 mètres, le pouls (en battements par minute) de sept étudiants suivants un cours d'éducation physique:

Classe 1	74	87	77	99	103	81	60
Classe 2	83	96	99	110	130	95	74

1. Pour la classe (1), estimer par intervalle de confiance la moyenne au risque 5%.
2. Pour la classe (1), tester au risque 5% si la moyenne vaut 80.
3. Pour la classe (2), estimer par intervalle de confiance la variance au risque 5%.
4. Pour la classe (2), tester au risque 5% si la variance vaut 330.
5. Comparer au risque 5% les variances des deux classes.
6. Comparer au risque 5% les moyennes des deux classes.

Bon courage

Degrés de liberté	Loi Student : P(T>t)					
	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055

Loi Khi-deux à v ddl : $P(Y^2>x)$

v \ α	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103
3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449
4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767
5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863
6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119
7	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753
8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902
9	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660
10	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093

Loi Fisher Snédécor à (v_1, v_2) ddl

$P(F \geqslant f_\alpha) = \alpha =$ **0,025**

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1 001	1 018
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,08

4.13 Références

[1] Emile Amzallag et Norbert Piccioli. *Introduction à la statistique.*

[2] Renée Veysseyre. *Aide-mémoire: Statistique et probabilités pour l'ingénieur.*

[3] Yves Tillé. *Résumé du cours de statistique descriptive.*

Série 1 (suite)

Les exercices 1, 2, et 3 ont été traités en groupe de T.D.

Exercice 4 :

1) $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 12$, $\bar{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = 10$.

$\sigma_X^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2 = 42$; $\sigma_Y^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2 = 29,2$

covariance entre X et Y : $\sigma_{XY} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = 27,3$

2) $r_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = 0,78$

Interprétation : X et Y sont fortement corrélés
cad : varient dans le même sens.

3) $y = \hat{a} + \hat{b}x$ où $\hat{b} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = 0,65$

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 2,2$.

d : $y = 2,2 + 0,65x$.

4) et 5) facile

6) $\bar{x} = 12$, $\bar{y} = 10$, $y = 2,2 + 0,65x$

on a bien : $\bar{y} = 2,2 + 0,65 \times \bar{x}$.

donc $(\bar{x}, \bar{y})$ appartient à la droite de regression.

7) $x = 22 \Rightarrow y = 2,2 + 0,65 \times 22 = 16,5$

8) $\sigma_e^2 = \sigma_Y^2(1 - r_{XY}^2) = 11,43$. (variance résiduelle)

coef de determination : $r^2 = r_{XY}^2 \simeq 0,60$

Interpretation : on a un bon modèle d'ajustement car r^2 assez proche de 1.

Exercice 5 :

1) $\bar{x} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i = 8$ $\bar{y} = \frac{1}{100}\sum_{1}^{100} y_i = 12$

$\sigma_X^2 = \frac{1}{100}\sum_{1}^{100}(x_i-\bar{x})^2 = 8$, $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = 2,82$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{150}\sum_{1}^{100}(y_i-\bar{y})^2 = 16 \qquad \sigma_y = 4$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{150}\sum_{1}^{100}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = 6$$

2) $r = r_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{6}{4\times 2,82} = 0,53$

Interprétation : corrélation r_{xy} est moyenne donc x et y sont moyennement liées.

3) $y = \hat{a} + \hat{b}x \implies y = 6 + 0,75\,x.$

$\hat{b} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = 0,75 \qquad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 6$

4) $\sigma_e^2 = \sigma_y^2(1 - r_{xy}^2) = 11,52$

$R^2 = r_{xy}^2 = 0,28$ ($\simeq 28\%$). le modèle est faible.

5) $x = \hat{a}' + \hat{b}'y.$

$\hat{b}' = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \dots \qquad \hat{a}' = \bar{x} - \hat{a}'\bar{y} = \dots$

à finir.

Série N°2

Exercice 1 :

1) $Card(\Omega) = C_6^2 = 15$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$P(X=0) = C_3^2/15 = 1/5$; $P(X=1) = C_3^1 \times C_3^1/15 = 3/5$

$P(X=2) = C_3^2/15 = 1/5$.

Vérification : $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$

x_i	0	1	2
P_i	$1/5$	$3/5$	$1/5$

$E(X) = 0 \times 1/5 + 1 \times 3/5 + 2 \times 1/5 = 1$

$E(X^2) = 0^2 \times 1/5 + 1^2 \times 3/5 + 2^2 \times 1/5 = \frac{9}{5}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 0,89$

2) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 4/5$

$P(X > 1) = P(X=2) = 1/5$

ou encore : $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1/5$

Exercice 2 :

1) $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$

$Card\ \Omega = 2^3 = 8$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

$P(X=0) = P(\{PPP\}) = 1/8$; $P(X=1) = P(\{FPP, PFP, PPPF\}) = 3/8$

$P(X=2) = \dots = 3/8$; $P(X=3) = \dots = 1/8$.

x	0	1	2	3
P_i	$1/8$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + \dots + 3 \times \frac{1}{8} = 1,5$; $V(X) = (0 - 1,5)^2 \times \frac{1}{8} + \dots + (3 - 1,5)^2 \times \frac{1}{8} = 0,75$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,86$.

2) $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 7/8$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 7/8 = 1/8$.

Exercice 3 :

1) $\Omega = \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\} = \{(0,0),(0,1),\dots(3,3\}$. Card $\Omega = 16$

$X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

$P(X=0) = P(\{0,0\}) = 1/16$, $P(X=1) = P\{(0,1),(1,0)\} = \frac{2}{16}$.

$P(X=2) = P\{(0,2),(2,0),(1,1)\} = 3/16$.

......

$P(X=6) = P\{(3,3)\} = 1/16$

x_i	0	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + \dots + 6 \times \frac{1}{16} = 3{,}125$

$V(X) = (0-3{,}125)^2 \times \frac{1}{16} + \dots + (6-3{,}125)^2 \times \frac{1}{16} = 1{,}96$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 1{,}40$

Exercice 4 :

1) X suit la loi $\mathcal{E}xp(1) \Rightarrow f(x) = e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{(x>0)}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$

2) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \int_0 x\,e^{-x}\,dx$

$\begin{cases} u' = e^{-x} \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -e^{-x} \\ v' = 1 \end{cases}$ d'où : $E(X) = \left[-x e^{-x}\right]_0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

$= \left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} - \left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$

$V(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 f(x)\,dx$

$= \int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x}\,dx$

... (faire une double intégration par parties)

$V(X) = 1$

$\sigma_X = \sqrt{V(x)} = 1$.

3) $P(X > 1) = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty} = e^{-1}$.

$P(X \leq 1) = 1 - P(X > 1) = 1 - e^{-1}$.

Exercice 5 :

1) $P(Z \leq 1,23) = \Phi(1,23) = \Phi(\underset{\text{ligne}}{1,2} + \underset{\text{colonne}}{0,03}) = 0,8907$ Table page 31 du cours

2) $P(Z \leq -1,23) = \Phi(-1,23)$

$= 1 - \Phi(1,23) = 0,1093$

3) $P(Z > 1,23) = 1 - \Phi(1,23) = 0,1093.$

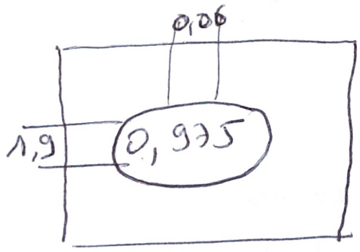
4) $P(|Z| > 1,23) = P(-1,23 < Z < 1,23) = \Phi(1,23) - \Phi(-1,23)$
$= \Phi(1,23) - (1 - \Phi(1,23)) = 2\Phi(1,23) - 1 = 0,7814$

5) $P(Z \in [0,45 ; 1,23]) = \Phi(1,23) - \Phi(0,45) = 0,8907 - 0,6763$
$= 0,2144.$

Exercice 6 :

1) $P(Z \leq z) = 0,975 \Rightarrow \Phi(z) = 0,975$

Table $\mathcal{N}(0,1)$
page : 31



$z = 1,9 + 0,06$
$= 1,96$

2) $P(Z \leq -z) = 0,3438 \Rightarrow \Phi(-z) = 0,3438$
$\Rightarrow 1 - \Phi(z) = 0,3438 \Rightarrow \Phi(z) = 0,6562.$

$\Rightarrow z = \dfrac{0,4 + 0,41}{2} \simeq 0,405.$

3) $P(Z > z) = 0,0125 \Rightarrow 1 - P(Z \leq z) = 0,0125.$
$\Rightarrow \Phi(z) = 0,9875 \Rightarrow z = 1,2 + 0,03 = 1,23.$

4) $P(|Z| < z) = 0,3438$
$\Rightarrow P(-z < Z < z) = 0,3438 = \Phi(z) - \Phi(-z)$
$\Rightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0,3438 \Rightarrow \Phi(z) = 0,6719.$
d'après la table (p : 31) $z \in [0,44 ; 0,45]$, $z \simeq \dfrac{0,44 + 0,45}{2}$
$\simeq 0,445$

Exercice 7 :

Rappel : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \mu \\ V(X) = \sigma^2 \end{cases}$

$\Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \begin{cases} E(Z) = 0 \\ V(Z) = 1 \end{cases}$

$P(33{,}4 < X < 72{,}6) = P\left(\frac{33{,}4-53}{10} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{72{,}6-53}{10}\right)$

$= P(-1{,}96 < Z < 1{,}96) = \Phi(1{,}96) - \Phi(-1{,}96)$

$= 2\,\Phi(1{,}96) - 1 = 2 \times 0{,}975 - 1 = 0{,}95$.

Exercice 8 : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-50}{10} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$P(X \leq z) = 0{,}67 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{z-50}{10}\right) = 0{,}65$

$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{z-50}{10}\right) = 0{,}67 = \Phi(0{,}44)$ (Table)

$\Rightarrow \frac{z-50}{10} = 0{,}44 \Rightarrow z = 54{,}4$

Exercice 9 : facultatif.

Exercice 10 : $X \sim \mathcal{N}(\mu = 1 \,;\, \sigma^2 = (0{,}03)^2)$.

$\Rightarrow Z = \frac{X-1}{0{,}03} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1) $P(X < 1{,}06) = P\left(\frac{X-1}{0{,}03} < \frac{1{,}06-1}{0{,}03}\right)$

$= P(Z < 2) - \Phi(2) = 0{,}9772$

2) $P(X > 0{,}9985) = 1 - P(X \leq 0{,}9985)$

$= 1 - P\left(\frac{X-1}{0{,}03} \leq \frac{0{,}9985-1}{0{,}03}\right)$

$= 1 - P(Z \leq -0{,}05)$

$= 1 - \Phi(-0{,}05) = \Phi(0{,}05)$

$= 0{,}5199$.

Série 3

Exercice 1 :

$n = 40$; $\sigma = 8,2$; $\bar{x}$ = age moyen des employés de l'échantillon.

Rappel : $\dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (cours)

$P(\mu - 2 < \bar{x} < \mu + 2) = P\left(\underbrace{\dfrac{\mu - 2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{-1,54} < \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \underbrace{\dfrac{\mu + 2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{1,54}\right)$

$= \phi(1,54) - \phi(-1,54)$

$= 2\phi(1,54) - 1 = 2\phi(1,5 + 0,04) - 1 = 2 \times 0,9382 - 1$

$= 0,8764.$

Exercice 2 :

$n = 100$; $p = 0,4$

Rappel : $\dfrac{\bar{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (voir cours).

$P(\bar{p} \in [0,35 ; 0,45]) = P\left(\dfrac{0,35 - 0,4}{\sqrt{\dfrac{(0,4)(1-0,4)}{100}}} \leqslant \underbrace{\dfrac{\bar{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}}_{Z} \leqslant \dfrac{0,45 - 0,4}{\sqrt{\dfrac{0,4(1-0,4)}{100}}}\right)$

$= P(-1,02 \leqslant Z \leqslant 1,02) = \phi(1,02) - \phi(-1,02)$

$= 2\phi(1,02) - 1 = 2\phi(1 + 0,02) = 2 \times 0,8461 - 1 = 0,6922$

Exercice 3 :

1) Population : 500 salariés.
Variable : " subir ou non une violence verbale ".
Type : qualitative nominale.

2) $\bar{p} = \dfrac{145}{500} = 0,29$

3) $1 - \alpha = 95\%$, $\alpha = 5\% = 0,05$

$I.C_{95\%}(p) = \left[\bar{p} - z_\alpha \sqrt{\dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} ; \bar{p} + z_\alpha \sqrt{\dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right]$

$\phi(z_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \implies z_\alpha = 1,96$

$\implies I.C_{95}(p) = [0,216 ; 0,364]$.

4) $\alpha = 10\% \implies \alpha = 0,1 \implies \phi(z_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95$

$\implies z_\alpha \simeq \dfrac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645 \implies I.C_{90\%}(p) = [0,227 ; 0,353]$

cl : $IC_{90\%}(p) \subset I.C_{95\%}$.

Exercice 4 :

1) $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{1}^{10} x_i = 2,13$; $s^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{1}^{10}(x_i-\bar{x})^2 = 0,23$; $s = \sqrt{s^2} = 0,48$

2) $n = 10 < 30$. $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$ loi de Student à $n-1=9$ degrés de liberté p: 38.

$$\begin{cases} P(T > t_\alpha) = \frac{\alpha}{2} = 0,025 \\ \alpha = 5\% \end{cases} \underset{\substack{\text{Table} \\ \text{p: 38}}}{\Longrightarrow} t_\alpha = 2,262$$

$$I.C_{95\%}(\mu) = \left[\bar{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right] = [1,786 ; 2,474].$$

Exercice 5 :

1) $\bar{x} = \frac{1}{17}\sum_{1}^{17} x_i = 253,47$; $s^2 = \frac{1}{17-1}\sum_{1}^{10}(x_i-\bar{x})^2 = 8,51$; $s = \sqrt{s^2} = 2,91$

2) $n = 17 < 30$; $\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ Student à $n-1=16$ d.d.l.

$$\begin{cases} P(T > t_\alpha) = 0,005 \ (\alpha/2) \\ \alpha = 1\% \end{cases} \Rightarrow t_\alpha = 2,921 \quad (p: 38)$$

$$I.C_{99\%}(\mu) = \left[\bar{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right] = [251,40 ; 255,53]$$

3) on suppose que σ^2 est connue : $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{cases} \phi(z_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ \alpha = 5\% \end{cases} \Rightarrow z_\alpha = 1,96$$

$$I.C_{95\%}(\mu) = \left[\bar{x} - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\text{amplitude} = \left(\bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2 z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq e$$

$$\Rightarrow z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1 \Rightarrow n \geq (z_\alpha \sigma)^2 \simeq 32,69 \simeq 33.$$

Exercice 6 :

1)

classes	[1610, 1615[	"	"	"	[1630, 1635]
Centres x_i	1612,5	1617,5	1622,5	1627,5	1632,5
n_i	7	8	42	75	18

$\bar{x} = \frac{1}{150}\sum_{i=1}^{5} n_i x_i = 1625,47$; $s^2 = \frac{1}{150-1}\sum_{i=1}^{5} n_i(x_i-\bar{x})^2 = 21,84$

$s = \sqrt{s^2} = 4,67.$

2) $n = 150 > 3 \Rightarrow \dfrac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$\begin{cases} \Phi(z_\alpha) = 1-\alpha/2 \\ \alpha = 5\% \end{cases} \Rightarrow z_\alpha = 1{,}96$

$I.C_{95\%}(\mu) = \left[\bar{x} - z_\alpha \dfrac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_\alpha \dfrac{s}{\sqrt{n}}\right] = [1624{,}722 ; 1626{,}18]$.

Exercice 7 :

$n = 10$

1) $\bar{x} = \dfrac{1}{10}\sum_{1}^{10} x_i = 47{,}2$; $s^2 = \dfrac{1}{10-1}\sum_{1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 207{,}96$; $s = 14{,}42$

2) $n = 10 < 30 \Rightarrow \dfrac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim$ Student $t(n-1) = t(9)$.

$\Rightarrow I.C_{95\%}(\mu) = \left[\bar{x} - t_\alpha \dfrac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_\alpha s/\sqrt{n}\right]$

$= [36{,}885 ; 57{,}515]$

3) $Y^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ (voir cours)

loi du chi 2 : $\chi^2(n-1) = \chi^2(9)$

$IC_{95\%}(\sigma^2) = \left[\dfrac{(n-1)}{a} s^2 , \dfrac{(n-1)}{b} s^2\right]$

$\begin{cases} \alpha = 0{,}05 \\ P(Y^2 > a) = \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow a = 19{,}0228 \\ P(Y^2 > b) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}975 \Rightarrow b = 2{,}7004 \end{cases}$

voir table du χ^2.

cd : $I.C_{95\%}(\sigma^2) = [98{,}38 ; 693{,}09]$